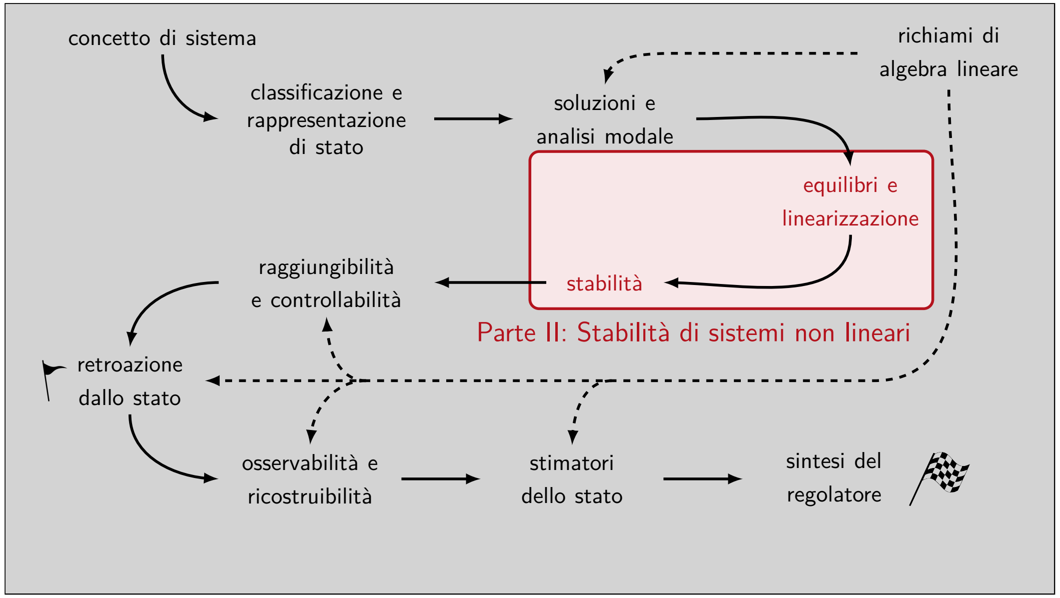
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 12: Esercizi di ricapitolazione su stabilità di sistemi non lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020



In questa lezione: esercizi!

- ▷ Esercizio 1: equilibri con ingressi costanti
- ▷ Esercizio 2: stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Esercizio 3: equazione di Lyapunov

Esercizio 1 [Es. 1 tema d'esame 24 Giugno 2019]

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Equilibri del sistema per $u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \forall t$?
2. Stabilità degli equilibri trovati usando il teorema di linearizzazione?

Esercizio 1: soluzione

1. $\alpha \neq 1$: unico equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2} \\ \frac{\bar{u}}{1-\alpha} \end{bmatrix}$.

   $\alpha = 1$: nessun equilibrio se $\bar{u} \neq 0$, infiniti equilibri $\begin{bmatrix} \beta^2 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$ se $\bar{u} = 0$.

2. equilibri asintoticamente stabili se $|\alpha| < 1$ e instabili se $|\alpha| > 1$.

Esercizio 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

1. Stabilità di $\bar{x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando il teorema di linearizzazione?

2. Nei casi critici usare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 2: soluzione

1. $-1 < \alpha < 0$: $\bar{x}$ asintoticamente stabile.

   $\alpha < -1$, $\alpha > 0$: $\bar{x}$ instabile.

2. Casi critici $\alpha = -1, 0$.

   $\alpha = -1$: $\bar{x}$ asintoticamente stabile.

   $\alpha = 0$: $\bar{x}$ semplicemente stabile.

Esercizio 3

$$\dot{x} = Fx, \quad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} \alpha & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Soluzioni dell'equazione di Lyapunov (se esistono) al variare di α?

2. Stabilità del sistema utilizzando le soluzioni trovate per $\alpha = 4$ e $\alpha = 2$?

Esercizio 3: soluzione

1. $P = \begin{bmatrix} \frac{\alpha+8}{2} & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. $\alpha = 4$: $P \succ 0$, $Q \succ 0 \implies$ stabilità asintotica.

   $\alpha = 2$: $P \succ 0$, $Q \succeq 0 \implies$ stabilità (almeno) semplice.