Esercizio 1 [Es. 1 tema d'esame 29 Gennaio 2020]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) - x_1^3(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1^2(t) + \alpha x_2(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Equilibri del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Stabilità dell'equilibrio in $(0,0)$ usando il teorema di linearizzazione?

note

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_1^3 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2 + \alpha x_2 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\bar{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^2} \text{ è eq.} \iff \begin{cases} 0 = \alpha \bar{x}_1 - \bar{x}_1^3 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 \\ 0 = 2\bar{x}_1^2 + \alpha \bar{x}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \quad '' & (i) \\ 2\bar{x}_1^2 = -\alpha \bar{x}_2 & (ii) \end{cases}$$

Caso $\alpha = 0$: $\left.\begin{matrix} (ii) & \bar{x}_1 = 0 \\ (i) & 0 = 0 \end{matrix}\right\} \exists \, \infty$ equilibri $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$, $\beta \in \mathbb{R}$

Caso $\alpha \neq 0$: (ii) $\bar{x}_2 = -\dfrac{2}{\alpha}\bar{x}_1^2$

(i) $\alpha \bar{x}_1 - \bar{x}_1^3 + \dfrac{2}{\alpha}\bar{x}_1^3 = 0 \implies \bar{x}_1\left(\alpha + \dfrac{2-\alpha}{\alpha}\bar{x}_1^2\right) = 0$

Soluzioni (reali) di (i) al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\bar{x}_1 = 0 \implies$ (ii) $\bar{x}_2 = 0 \implies$ eq. $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
- Sol. (reali) $\dfrac{2-\alpha}{\alpha}\bar{x}_1^2 = -\alpha \implies \alpha \neq 2 \implies \bar{x}_1^2 = \dfrac{\alpha^2}{\alpha - 2}$

$\implies \alpha - 2 > 0 \implies \alpha > 2 \implies 2$ eq. $\bar{x} = \begin{bmatrix} \pm \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha-2}} \\ -\dfrac{2\alpha}{\alpha-2} \end{bmatrix}$

Equilibri:

- $\alpha = 0$: ∞ eq. $[0 \;\; \beta]^T$, $\beta \in \mathbb{R}$
- $\alpha > 2$: 3 eq. $[0 \;\; 0]^T$, $[\pm\alpha/\sqrt{\alpha-2} \;\; -2\alpha/(\alpha-2)]$
- $\alpha \leq 2$ $(\alpha \neq 0)$: 1 eq. $[0 \;\; 0]^T$

2) Stabilità in $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ usando la linearizzazione:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \alpha - 3x_1^2 - x_2 & -x_1 \\ 4x_1 & \alpha \end{bmatrix}_{x=\bar{x}}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{autovalori in } \alpha$$

(i) $\alpha < 0 \implies \bar{x}$ asint. stabile

(ii) $\alpha > 0 \implies \bar{x}$ instabile

(Caso critico $\alpha = 0$!)

Esercizio 2 [Es. 1 tema d'esame 24 Giugno 2019]

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Equilibri del sistema per $u(t) = \bar{u} =$ cost. $\forall t$?
2. Stabilità degli equilibri trovati usando il teorema di linearizzazione?

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Equilibri per $u(t) = \bar{u} = \text{cost} \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ è eq.} \iff \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_2 = \alpha \bar{x}_2 + \bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} \quad '' & \text{(i)} \\ (1-\alpha)\bar{x}_2 = \bar{u} & \text{(ii)} \end{cases}$$

__Caso $\alpha = 1$__:
$$\left.\begin{aligned} &\text{(ii)} \quad \bar{u} = 0 \\ &\text{(i)} \quad \bar{x}_1 = \bar{x}_2^2 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &\bar{u} \neq 0 \implies \nexists \text{ equilibri} \\ &\bar{u} = 0 \implies \infty \text{ eq. } \bar{x} = \begin{bmatrix} \beta^2 \\ \beta \end{bmatrix}, \ \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

__Caso $\alpha \neq 1$__:
$$\left.\begin{aligned} &\text{(ii)} \quad \bar{x}_2 = \frac{\bar{u}}{1-\alpha} \\ &\text{(i)} \quad \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2} \end{aligned}\right\} \quad 1 \text{ eq. } \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2} \\ \frac{\bar{u}}{1-\alpha} \end{bmatrix}$$

---

2) Stabilità tramite linearizzazione:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\bar{x}_2 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \quad \text{autovalori in } 0, \alpha$$

(i) $|\alpha| < 1 \implies$ equilibri asint. stabili

$|\alpha| > 1 \implies$ equilibri instabili

(caso critico $|\alpha| = 1$)

Esercizio 3

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2\end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = (0,0)$$

1. Stabilità di $\bar{x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando il teorema di linearizzazione?
2. Nei casi critici usare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

note

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha) x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2\end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

1) Stabilità di $\bar{x}$ tramite linearizzazione

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix}\alpha + x_2^2 & 2x_1x_2 + 3x_2^2 \\ -x_2^2 - 2x_1x_2 & -(1+\alpha) - 2x_1x_2 - x_1^2\end{bmatrix}_{x=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix}\alpha & 0 \\ 0 & -1-\alpha\end{bmatrix} \quad \text{autovalori } \alpha, -1-\alpha$$

(i) $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow \bar{x}$ è asint. stabile

(ii) $\alpha < -1, \alpha > 0 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile

Casi critici: $\alpha = -1, \alpha = 0$

---

2) Stabilità tramite Lyapunov / Krasowskii

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

- V è def. pos? Sì
- $\dot{V}$ è semidef. neg. (in un intorno di $\bar{x}$)?

$$\dot{V}(x_1,x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(\alpha x_1 + x_1x_2^2 + x_2^3) + 2x_2(-(1+\alpha)x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2)$$

$$= 2\alpha x_1^2 + \cancel{2x_1^2x_2^2} + \cancel{2x_1x_2^3} - 2(1+\alpha)x_2^2 - \cancel{2x_1x_2^3} - \cancel{2x_1^2x_2^2}$$

$$\dot V(x_1,x_2) = 2x_1\dot x_1 + 2x_2\dot x_2 = 2x_1\left(\alpha x_1 + x_1x_2^2 + x_2^3\right) + 2x_2\left(-(1+\alpha)x_2 - x_1x_2^2 - x_1^2x_2\right)$$

$$= 2\alpha x_1^2 + \cancel{2x_1^2x_2^2} + \cancel{2x_1x_2^3} - 2(1+\alpha)x_2^2 - \cancel{2x_1x_2^3} - \cancel{2x_1^2x_2^2}$$

$$= 2\alpha x_1^2 - 2(1+\alpha)x_2^2$$

(i) $\underline{\alpha=-1}$: $\dot V(x_1,x_2) = -2x_1^2$ semidef. negativa (in un intorno $\mathcal{I}=\mathbb{R}^2$ di $\bar x$)

Per il teorema di Lyapunov, $\bar x$ è (almeno) sempl. stabile

Usiamo Krasowskii:

$$\mathcal{N} = \{x : \dot V(x) = 0\} = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 = 0\}$$

$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_1(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \dot x_1(t) = 0 \ \forall t$

$$\hookrightarrow \begin{cases} 0 = x_2^3(t) \Rightarrow x_2(t) = 0 \ \forall t \\ \dot x_2(t) = 0 \end{cases}$$

$x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è l'unica traiettoria che è contenuta in $\mathcal{N}\,(\cap\,\mathcal{I})$

$\Downarrow$

$\bar x$ è asint. stabile

(ii) $\underline{\alpha=0}$: $\dot V(x_1,x_2) = -2x_2^2$ semidef. negativa

Per il teorema di Lyapunov, $\bar x$ è (almeno) sempl. stabile

Usiamo Krasowskii:

$$\mathcal{N} = \{x : \dot V(x) = 0\} = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_2 = 0\}$$

$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_2(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \dot x_2(t) = 0 \ \forall t$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{cases} x_1(t) = \text{cost.} \\ \text{"} \end{cases} \right\} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{I}$

è una traiettoria che è int. contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, dove $\mathcal{I}$ è un qualsiasi intorno di $\bar{x}$

$\Downarrow$

$\bar{x}$ è (solo) sempl. stabile

Esercizio 4 [Es. 1 tema d'esame 10 Settembre 2020]

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= \alpha^2 x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Per $\beta = 0$, equilibri al variare di α?
2. Per $\beta = 0$, stabilità degli equilibri usando la linearizzazione?
3. Per $\alpha = 0$, $\beta = 1$, studiare stabilità di $\bar{x} = (0,0)$ usando $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

note

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha^2 x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2(t+1) = -x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1) $\beta = 0$, equilibri al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ eq.} \iff \begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha^2 \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 - \alpha \bar{x}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} (1-\alpha^2)\bar{x}_1 = 0 & \text{(i)} \\ (1+\alpha)\bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 & \text{(ii)} \end{cases}$$

<u>Caso $\alpha = \pm 1$</u>: (i) $0 = 0$

(ii) <u>$\alpha = +1$</u>: $2\bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 \Rightarrow \infty$ eq. $\bar{x} = \begin{bmatrix} \gamma \\ -\gamma^2/2 \end{bmatrix}$ $\gamma \in \mathbb{R}$

<u>$\alpha = -1$</u>: $\bar{x}_1^2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0 \Rightarrow \infty$ eq. $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix}$ $\gamma \in \mathbb{R}$

<u>Caso $\alpha \neq \pm 1$</u>:

$$\left.\begin{array}{l} \text{(i) } \bar{x}_1 = 0 \\ \text{(ii) } (1+\alpha)\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = 0 \end{array}\right\} 1 \text{ eq. } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

---

2) Stabilità tramite linearizzazione ($\beta = 0$):

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ -2\bar{x}_1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

autovalori in $\alpha^2, -\alpha$

i) $|\alpha| < 1 \Rightarrow$ equilibri asint. stabili

ii) $|\alpha| > 1 \Rightarrow$ equilibri instabili

caso critico: $|\alpha| = 1$

3) $\alpha = 0$, $\beta = 1$: stabilità tramite Lyapunov/Krasowskii di $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

- V è def. pos.? Sì
- ΔV è semidef. neg?

$$\Delta V(x_1(t), x_2(t)) = V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t))$$
$$= x_1^2(t+1) + x_2^2(t+1) - x_1^2(t) - x_2^2(t)$$
$$= \cancel{x_2^2} + x_1^4 - x_1^2 - \cancel{x_2^2} = x_1^2(x_1^2 - 1)$$
$$= -x_1^2(1 - x_1^2)$$ semidef. negativa in un intorno di $\bar{x}$

Per il teorema di Lyapunov, $\bar{x}$ è (almeno) sempl. stabile.

Usiame Krasowskii:

$$N = \{x : \Delta V(x) = 0\} = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 = 0\} \cup \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 = \pm 1\}$$

$$\mathcal{I} = (-1, 1) \times \mathbb{R}$$

$$x(t) \in N \cap \mathcal{I} \Rightarrow x_1(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow x_1(t+1) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}_+$$

$$\begin{cases} 0 = x_2(t) \\ x_2(t+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ è l'unica traiettoria interamente contenuta in $N \cap \mathcal{I}$

$$\Longrightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ è asintoticamente stabile