

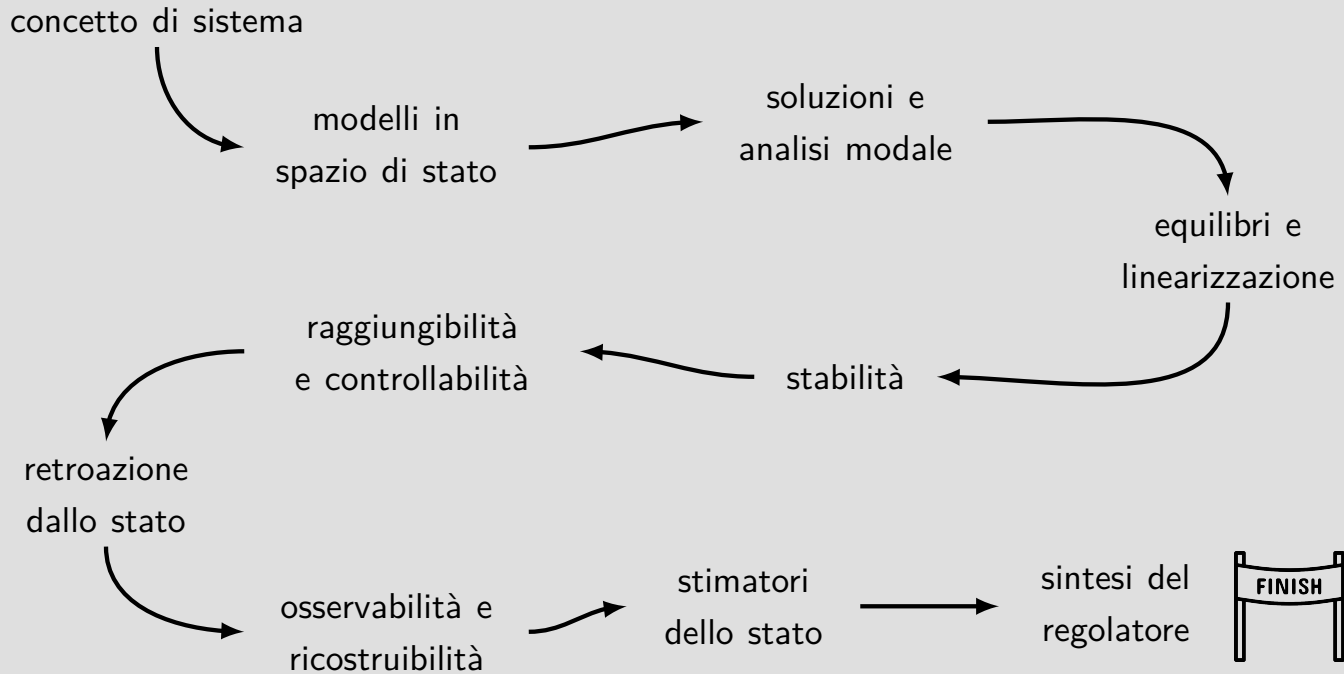
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)  
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 12: Esercizi di ricapitolazione Parte II

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



# In questa lezione

- ▷ Esercizio 1: equilibri e linearizzazione t.c.
- ▷ Esercizio 2: equilibri e linearizzazione t.d.
- ▷ Esercizio 3: stabilità di sistemi non lineari t.c.
- ▷ Esercizio 4: stabilità di sistemi non lineari t.d.

# Esercizio 1

[Es. 1 tema d'esame 29 Gennaio 2020]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) - x_1^3(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1^2(t) + \alpha x_2(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Equilibri del sistema al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?
2. Stabilità dell'equilibrio in  $(0, 0)$  usando il teorema di linearizzazione?

# Esercizio 1: soluzione

1.  $\alpha = 0$ : infiniti equilibri  $\bar{x} = (0, \beta)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

$\alpha > 2$ : tre equilibri  $(0, 0)$ ,  $(\pm\alpha/\sqrt{\alpha-2}, -2\alpha/(\alpha-2))$ .

$\alpha \leq 2$  (e  $\alpha \neq 0$ ): un equilibrio  $(0, 0)$ .

2.  $\bar{x} = (0, 0)$  asintoticamente stabile se  $\alpha < 0$  e instabile se  $\alpha > 0$ .

## Esercizio 2 [Es. 1 tema d'esame 24 Giugno 2019]

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Equilibri del sistema per  $u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \forall t$ ?
2. Stabilità degli equilibri trovati usando il teorema di linearizzazione?

## Esercizio 2: soluzione

1.  $\alpha \neq 1$ : unico equilibrio  $\bar{x} = \left( \frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2}, \frac{\bar{u}}{1-\alpha} \right)$ .

$\alpha = 1$ : nessun equilibrio se  $\bar{u} \neq 0$ , infiniti equilibri  $(\beta^2, \beta)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  se  $\bar{u} = 0$ .

2. equilibri asintoticamente stabili se  $|\alpha| < 1$  e instabili se  $|\alpha| > 1$ .

## Esercizio 3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1 + \alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = (0, 0)$$

1. Stabilità di  $\bar{x}$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  usando il teorema di linearizzazione?
2. Nei casi critici usare la funzione  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .



## Esercizio 3: soluzione

1.  $-1 < \alpha < 0$ :  $\bar{x}$  asintoticamente stabile.

$\alpha < -1, \alpha > 0$ :  $\bar{x}$  instabile.

2. Casi critici  $\alpha = -1, 0$ .

$\alpha = -1$ :  $\bar{x}$  asintoticamente stabile.

$\alpha = 0$ :  $\bar{x}$  semplicemente stabile.

## Esercizio 4 [Es. 1 tema d'esame 10 Settembre 2020]

$$\begin{cases} x_1(t+1) &= \alpha^2 x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Per  $\beta = 0$ , equilibri al variare di  $\alpha$ ?
2. Per  $\beta = 0$ , stabilità degli equilibri usando la linearizzazione?
3. Per  $\alpha = 0, \beta = 1$ , studiare stabilità di  $\bar{x} = (0, 0)$  usando  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

## Esercizio 4: soluzione

1.  $\alpha \neq \pm 1$ : unico equilibrio  $\bar{x} = (0, 0)$ .

$\alpha = 1$ : infiniti equilibri  $\bar{x} = (\gamma, -\gamma^2/2)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

$\alpha = -1$ : infiniti equilibri  $\bar{x} = (0, \gamma)$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}$ .

2. equilibri asintoticamente stabili se  $|\alpha| < 1$  e instabili se  $|\alpha| > 1$ .

3.  $\bar{x} = (0, 0)$  asintoticamente stabile.

# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

## Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 12: Esercizi di ricapitolazione Parte II

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ [baggio@dei.unipd.it](mailto:baggio@dei.unipd.it)

🌐 [baggiogi.github.io](https://github.com/baggiogi)

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - x_1^3(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1^2(t) + \alpha x_2(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Equilibri del sistema al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?

2. Stabilità dell'equilibrio in  $(0,0)$  usando il teorema di linearizzazione?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_1^3 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2 + \alpha x_2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Equilibri al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \downarrow \begin{matrix} \text{è eq.} \\ \in \mathbb{R}^2 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha \bar{x}_1 - \bar{x}_1^3 - \bar{x}_1 \bar{x}_2 & (i) \\ 0 = 2\bar{x}_1^2 + \alpha \bar{x}_2 & (ii) \end{cases}$$

Caso  $\alpha = 0$ :  $\begin{cases} (ii) \bar{x}_1 = 0 \\ (i) 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \exists \infty \text{ equilibri } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R}$

Caso  $\alpha \neq 0$ : (ii)  $\bar{x}_2 = -\frac{2}{\alpha} \bar{x}_1^2$

(i)  $\alpha \bar{x}_1 - \bar{x}_1^3 + \frac{2}{\alpha} \bar{x}_1^3 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 \left( \alpha + \frac{2-\alpha}{\alpha} \bar{x}_1^2 \right) = 0$

Soluzioni (reali) di (i) al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ :

•  $\bar{x}_1 = 0 \Rightarrow (ii) \bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \text{eq. } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

• Sol. (reali)  $\frac{2-\alpha}{\alpha} \bar{x}_1^2 = -\alpha \Rightarrow \alpha \neq 2 \Rightarrow \bar{x}_1^2 = \frac{\alpha^2}{\alpha-2}$

$\Rightarrow \alpha - 2 > 0 \Rightarrow \alpha > 2 \Rightarrow 2 \text{ eq. } \bar{x} = \begin{bmatrix} \pm \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha-2}} \\ -\frac{2\alpha}{\alpha-2} \end{bmatrix}$

Equilibri:

-  $\alpha = 0$ :  $\infty$  eq.  $[0 \ \beta]^T, \beta \in \mathbb{R}$

-  $\alpha > 2$ : 3 eq.  $[0 \ 0]^T, [\pm \alpha/\sqrt{\alpha-2} \ -2\alpha/(\alpha-2)]^T$

-  $\alpha \leq 2$  ( $\alpha \neq 0$ ): 1 eq.  $[0 \ 0]^T$

2) Stabilità in  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  usando la linearizzazione:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \alpha - 3x_1^2 - x_2 & -x_1 \\ 4x_1 & \alpha \end{bmatrix}_{x=\bar{x}}$$
$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ autovalori in } \alpha$$

(i)  $\alpha < 0 \implies \bar{x}$  asint. stabile

(ii)  $\alpha > 0 \implies \bar{x}$  instabile

(Caso critico  $\alpha = 0!$ )

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Equilibri del sistema per  $u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \forall t$ ?
- Stabilità degli equilibri trovati usando il teorema di linearizzazione?

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1) Equilibri per  $u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \alpha \in \mathbb{R}$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ e' eq. } \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_2 = \alpha \bar{x}_2 + \bar{u} \end{cases} \begin{cases} \text{"} & \text{(i)} \\ (1-\alpha) \bar{x}_2 = \bar{u} & \text{(ii)} \end{cases}$$

Caso  $\alpha = 1$ :  $\begin{cases} \text{(ii) } \bar{u} = 0 \\ \text{(i) } \bar{x}_1 = \bar{x}_2^2 \end{cases} \begin{cases} \bar{u} \neq 0 \Rightarrow \text{ } \cancel{\text{A}} \text{ equilibri} \\ \bar{u} = 0 \Rightarrow \infty \text{ eq. } \bar{x} = \begin{bmatrix} \beta^2 \\ \beta \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

Caso  $\alpha \neq 1$ :  $\begin{cases} \text{(ii) } \bar{x}_2 = \frac{\bar{u}}{1-\alpha} \\ \text{(i) } \bar{x}_1 = \frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2} \end{cases} \begin{cases} 1 \text{ eq. } \bar{x} = \begin{bmatrix} \frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2} \\ \frac{\bar{u}}{1-\alpha} \end{bmatrix} \end{cases}$

2) Stabilità tramite linearizzazione:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\bar{x}_2 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \text{ autovalori in } 0, \alpha$$

(i)  $|\alpha| < 1 \Rightarrow$  equilibri asint. stabili

$|\alpha| > 1 \Rightarrow$  equilibri instabili

(caso critico  $|\alpha| = 1$ )

## Esercizio 3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = (0,0)$$

1. Stabilità di  $\bar{x}$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  usando il teorema di linearizzazione?

2. Nei casi critici usare la funzione  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) Stabilità di  $\bar{x}$  tramite linearizzazione

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \alpha + x_2^2 & 2x_1 x_2 + 3x_2^2 \\ -x_2^2 - 2x_1 x_2 & -(1+\alpha) - 2x_1 x_2 - x_1^2 \end{bmatrix}_{x=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -1-\alpha \end{bmatrix} \quad \text{autovalori } \alpha, -1-\alpha$$

(i)  $-1 < \alpha < 0 \Rightarrow \bar{x}$  è asint. stabile

(ii)  $\alpha < -1, \alpha > 0 \Rightarrow \bar{x}$  è instabile

Caso critici:  $\alpha = -1, \alpha = 0$

2) Stabilità tramite Lyapunov / Krasovskii

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

•  $V$  è def. pos? Sì

•  $\dot{V}$  è semidef. neg. (in un intorno di  $\bar{x}$ )?

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2x_1 (\alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3) + 2x_2 (-(1+\alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2) \\ &= 2\alpha x_1^2 + \cancel{2x_1^2 x_2^2} + \cancel{2x_1 x_2^3} - 2(1+\alpha)x_2^2 - \cancel{2x_1 x_2^3} - \cancel{2x_1^2 x_2^2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1 \dot{x}_1 + 2x_2 \dot{x}_2 = 2x_1(\alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3) + 2x_2(-(1+\alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2) \\ &= 2\alpha x_1^2 + \cancel{2x_1^2 x_2^2} + \cancel{2x_1 x_2^3} - 2(1+\alpha)x_2^2 - \cancel{2x_1 x_2^3} - \cancel{2x_1^2 x_2^2} \\ &= 2\alpha x_1^2 - 2(1+\alpha)x_2^2\end{aligned}$$

(i)  $\alpha = -1$ :  $\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2$  semidef. negativa (in un intorno  $\mathcal{I} = \mathbb{R}^2$  di  $\bar{x}$ )

Per il teorema di Lyapunov,  $\bar{x}$  è (almeno) sempl. stabile

Usiamo Krasovskii:

$$\mathcal{N} = \{x: \dot{V}(x) = 0\} = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}: x_1 = 0\}$$

$$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_1(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \dot{x}_1(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = x_2^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow x_2(t) = 0 \quad \forall t \quad \left. \vphantom{\left\{ \begin{array}{l} 0 = x_2^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = 0 \end{array} \right.}} \right\} x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ è l'unica traiettoria che è contenuta in } \mathcal{N} \cap \mathcal{I}$$

$\Downarrow$   
 $\bar{x}$  è asint. stabile

(ii)  $\alpha = 0$ :  $\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_2^2$  semidef. negativa

Per il teorema di Lyapunov,  $\bar{x}$  è (almeno) sempl. stabile

Usiamo Krasovskii:

$$\mathcal{N} = \{x: \dot{V}(x) = 0\} = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_2 = 0\}$$

$$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_2(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1(t) = \text{cost.} \\ \text{"} \end{cases} \quad x(t) = \begin{bmatrix} x_{0,1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{0,1} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{I}$$

è una traiettoria che è int.  
contenuta in  $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$ , dove  $\mathcal{I}$   
è un qualsiasi intorno di  $\bar{x}$



$\bar{x}$  è (sole) sempl. stabile

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha^2 x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2(t+1) = -x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Per  $\beta = 0$ , equilibri al variare di  $\alpha$ ?
2. Per  $\beta = 0$ , stabilità degli equilibri usando la linearizzazione?
3. Per  $\alpha = 0, \beta = 1$ , studiare stabilità di  $\bar{x} = (0, 0)$  usando  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha^2 x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2(t+1) = -x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

1)  $\beta = 0$ , equilibri al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ eq. } \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha^2 \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 - \alpha \bar{x}_2 \end{cases} \begin{cases} (1-\alpha^2) \bar{x}_1 = 0 & \text{(i)} \\ (1+\alpha) \bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 & \text{(ii)} \end{cases}$$

Caso  $\alpha = \pm 1$ : (i)  $0 = 0$

(ii)  $\alpha = +1$ :  $2\bar{x}_2 = -\bar{x}_1^2 \Rightarrow \infty \text{ eq. } \bar{x} = \begin{bmatrix} \gamma \\ -\gamma^2/2 \end{bmatrix} \gamma \in \mathbb{R}$

$\alpha = -1$ :  $\bar{x}_1^2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = 0 \Rightarrow \infty \text{ eq. } \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} \gamma \in \mathbb{R}$

Caso  $\alpha \neq \pm 1$ : (i)  $\bar{x}_1 = 0$

(ii)  $(1+\alpha)\bar{x}_2 = 0 \Rightarrow \bar{x}_2 = 0$  } 1 eq.  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) Stabilità tramite linearizzazione ( $\beta = 0$ ):

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 \\ -2\bar{x}_1 & -\alpha \end{bmatrix} \quad \text{autovalori in } \alpha^2, -\alpha$$

i)  $|\alpha| < 1 \Rightarrow$  equilibri asint. stabili | caso critico:  $|\alpha| = 1$

ii)  $|\alpha| > 1 \Rightarrow$  equilibri instabili

3)  $\alpha=0, \beta=1$ : stabilità tramite Lyapunov/Krasovskii di  $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

•  $V$  è def. pos.? Sì

•  $\Delta V$  è semidef. neg.?

$$\Delta V(x_1(t), x_2(t)) = V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t))$$

$$= x_1^2(t+1) + x_2^2(t+1) - x_1^2(t) - x_2^2(t)$$

$$= \cancel{x_2^2} + x_1^4 - x_1^2 - \cancel{x_2^2} = x_1^2(x_1^2 - 1)$$

$$= -x_1^2(1 - x_1^2)$$

semidef. negativa  
in un intorno  
di  $\bar{x}$

Per il teorema di Lyapunov,  $\bar{x}$  è (almeno) sempl. stabile.

Usiamo Krasovskii:

$$\mathcal{N} = \{x : \Delta V(x) = 0\} = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 = 0\} \cup \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 = \pm 1\}$$

$$\mathcal{I} = (-1, 1) \times \mathbb{R}$$

$$x(t) \in \mathcal{N} \cap \mathcal{I} \Rightarrow x_1(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow x_1(t+1) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}_+$$

$$\begin{cases} 0 = x_2(t) \\ x_2(t+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{Z}_+ \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ è l'unica traiettoria} \\ \text{interamente contenuta} \\ \text{in } \mathcal{N} \cap \mathcal{I}$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ è asintoticamente stabile}$$