

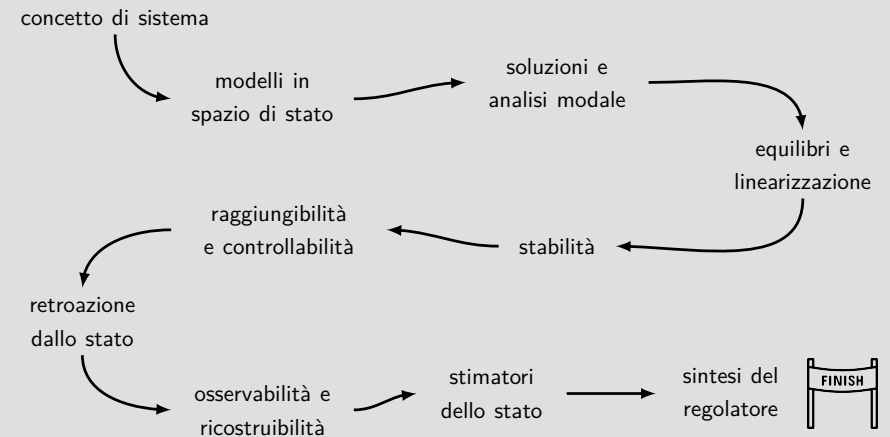
# Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 12: Esercizi di ricapitolazione Parte II

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021



## In questa lezione

- ▷ Esercizio 1: equilibri e linearizzazione t.c.
- ▷ Esercizio 2: equilibri e linearizzazione t.d.
- ▷ Esercizio 3: stabilità di sistemi non lineari t.c.
- ▷ Esercizio 4: stabilità di sistemi non lineari t.d.

## Esercizio 1 [Es. 1 tema d'esame 29 Gennaio 2020]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \alpha x_1(t) - x_1^3(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = 2x_1^2(t) + \alpha x_2(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Equilibri del sistema al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$ ?
2. Stabilità dell'equilibrio in  $(0, 0)$  usando il teorema di linearizzazione?

## Esercizio 1: soluzione

1.  $\alpha = 0$ : infiniti equilibri  $\bar{x} = (0, \beta)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ .

$\alpha > 2$ : tre equilibri  $(0, 0)$ ,  $(\pm\alpha/\sqrt{\alpha-2}, -2\alpha/(\alpha-2))$ .

$\alpha \leq 2$  (e  $\alpha \neq 0$ ): un equilibrio  $(0, 0)$ .

2.  $\bar{x} = (0, 0)$  asintoticamente stabile se  $\alpha < 0$  e instabile se  $\alpha > 0$ .

## Esercizio 2 [Es. 1 tema d'esame 24 Giugno 2019]

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Equilibri del sistema per  $u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \forall t$ ?

2. Stabilità degli equilibri trovati usando il teorema di linearizzazione?

## Esercizio 2: soluzione

1.  $\alpha \neq 1$ : unico equilibrio  $\bar{x} = \left(\frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2}, \frac{\bar{u}}{1-\alpha}\right)$ .

$\alpha = 1$ : nessun equilibrio se  $\bar{u} \neq 0$ , infiniti equilibri  $(\beta^2, \beta)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  se  $\bar{u} = 0$ .

2. equilibri asintoticamente stabili se  $|\alpha| < 1$  e instabili se  $|\alpha| > 1$ .

## Esercizio 3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha)x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

1. Stabilità di  $\bar{x}$  al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$  usando il teorema di linearizzazione?

2. Nei casi critici usare la funzione  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

### Esercizio 3: soluzione

1.  $-1 < \alpha < 0$ :  $\bar{x}$  asintoticamente stabile.

$\alpha < -1, \alpha > 0$ :  $\bar{x}$  instabile.

2. Casi critici  $\alpha = -1, 0$ .

$\alpha = -1$ :  $\bar{x}$  asintoticamente stabile.

$\alpha = 0$ :  $\bar{x}$  semplicemente stabile.

### Esercizio 4 [Es. 1 tema d'esame 10 Settembre 2020]

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha^2 x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2(t+1) = -x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Per  $\beta = 0$ , equilibri al variare di  $\alpha$ ?

2. Per  $\beta = 0$ , stabilità degli equilibri usando la linearizzazione?

3. Per  $\alpha = 0, \beta = 1$ , studiare stabilità di  $\bar{x} = (0, 0)$  usando  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

### Esercizio 4: soluzione

1.  $\alpha \neq \pm 1$ : unico equilibrio  $\bar{x} = (0, 0)$ .

$\alpha = 1$ : infiniti equilibri  $\bar{x} = (\gamma, -\gamma^2/2), \gamma \in \mathbb{R}$ .

$\alpha = -1$ : infiniti equilibri  $\bar{x} = (0, \gamma), \gamma \in \mathbb{R}$ .

2. equilibri asintoticamente stabili se  $|\alpha| < 1$  e instabili se  $|\alpha| > 1$ .

3.  $\bar{x} = (0, 0)$  asintoticamente stabile.