Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 12: Esercizi di ricapitolazione Parte II

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

concetto di sistema

modelli in spazio di stato

soluzioni e analisi modale

equilibri e linearizzazione

stabilità

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

In questa lezione

- ▷ Esercizio 1: equilibri e linearizzazione t.c.
- ▷ Esercizio 2: equilibri e linearizzazione t.d.
- ▷ Esercizio 3: stabilità di sistemi non lineari t.c.
- ▷ Esercizio 4: stabilità di sistemi non lineari t.d.

Esercizio 1 [Es. 1 tema d'esame 29 Gennaio 2020]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) & = \alpha x_1(t) - x_1^3(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = 2x_1^2(t) + \alpha x_2(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Equilibri del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$?
2. Stabilità dell'equilibrio in $(0,0)$ usando il teorema di linearizzazione?

Esercizio 1: soluzione

1. $\alpha = 0$: infiniti equilibri $\bar{x} = (0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$.

   $\alpha > 2$: tre equilibri $(0, 0)$, $(\pm\alpha/\sqrt{\alpha - 2}, -2\alpha/(\alpha - 2))$.

   $\alpha \leq 2$ (e $\alpha \neq 0$): un equilibrio $(0, 0)$.

2. $\bar{x} = (0, 0)$ asintoticamente stabile se $\alpha < 0$ e instabile se $\alpha > 0$.

Esercizio 2 [Es. 1 tema d'esame 24 Giugno 2019]

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_2^2(t) \\ x_2(t+1) = \alpha x_2(t) + u(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

1. Equilibri del sistema per $u(t) = \bar{u} = \text{cost. } \forall t$?

2. Stabilità degli equilibri trovati usando il teorema di linearizzazione?

Esercizio 2: soluzione

1. $\alpha \neq 1$: unico equilibrio $\bar{x} = \left(\frac{\bar{u}^2}{(1-\alpha)^2}, \frac{\bar{u}}{1-\alpha}\right)$.

   $\alpha = 1$: nessun equilibrio se $\bar{u} \neq 0$, infiniti equilibri (β^2, β), $\beta \in \mathbb{R}$ se $\bar{u} = 0$.

2. equilibri asintoticamente stabili se $|\alpha| < 1$ e instabili se $|\alpha| > 1$.

Esercizio 3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + x_1 x_2^2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 = -(1+\alpha) x_2 - x_1 x_2^2 - x_1^2 x_2 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$$

1. Stabilità di $\bar{x}$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ usando il teorema di linearizzazione?
2. Nei casi critici usare la funzione $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 3: soluzione

1. $-1 < \alpha < 0$: $\bar{x}$ asintoticamente stabile.

   $\alpha < -1$, $\alpha > 0$: $\bar{x}$ instabile.

2. Casi critici $\alpha = -1, 0$.

   $\alpha = -1$: $\bar{x}$ asintoticamente stabile.

   $\alpha = 0$: $\bar{x}$ semplicemente stabile.

Esercizio 4 [Es. 1 tema d'esame 10 Settembre 2020]

$$\begin{cases} x_1(t+1) & = \alpha^2 x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2(t+1) & = -x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \beta \in \mathbb{R}.$$

1. Per $\beta = 0$, equilibri al variare di α?
2. Per $\beta = 0$, stabilità degli equilibri usando la linearizzazione?
3. Per $\alpha = 0$, $\beta = 1$, studiare stabilità di $\bar{x} = (0,0)$ usando $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 4: soluzione

1. $\alpha \neq \pm 1$: unico equilibrio $\bar{x} = (0, 0)$.

   $\alpha = 1$: infiniti equilibri $\bar{x} = (\gamma, -\gamma^2/2)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

   $\alpha = -1$: infiniti equilibri $\bar{x} = (0, \gamma)$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

2. equilibri asintoticamente stabili se $|\alpha| < 1$ e instabili se $|\alpha| > 1$.

3. $\bar{x} = (0, 0)$ asintoticamente stabile.