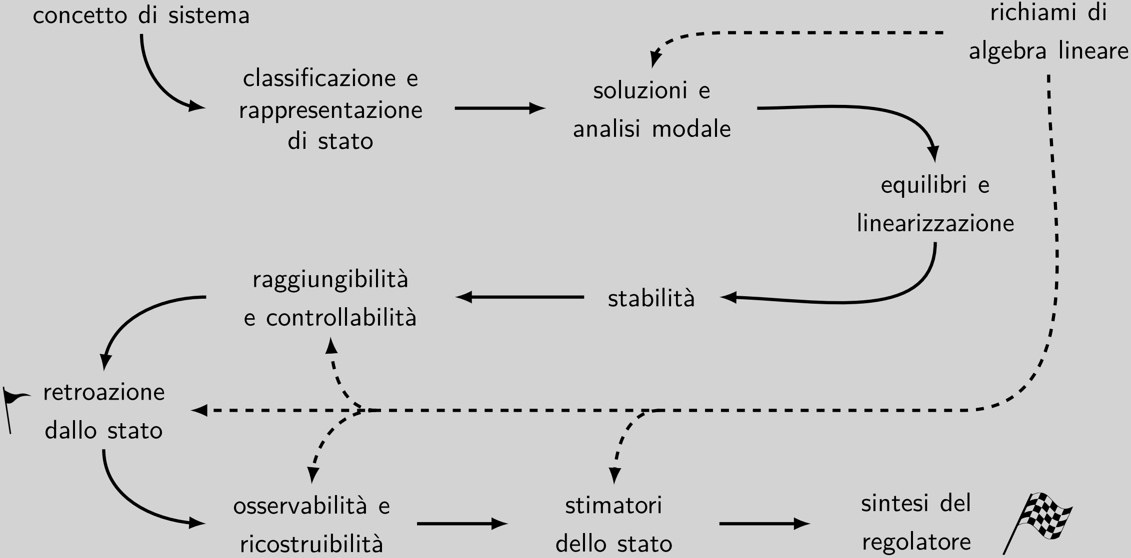
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

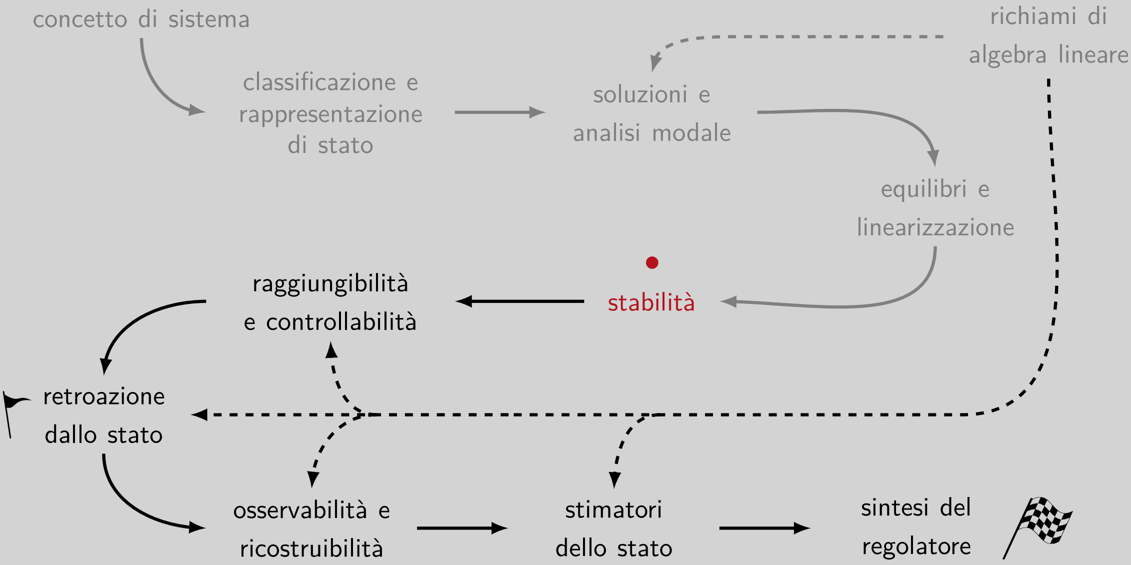
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e teorema di Lyapunov per sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore



• noi siamo qui

Nella scorsa lezione

- Teorema di linearizzazione
- Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- Funzioni di Lyapunov
- Teorema di stabilità di Lyapunov

In questa lezione

- ▷ Teorema di Krasowskii
- ▷ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.c.
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.d.

In questa lezione

- ▷ Teorema di Krasowskii
- ▷ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.c.
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.d.

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \quad \text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \qquad \text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \quad \text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0$, $\forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile

2. Se $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$ instabile

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \qquad \text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \qquad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0$, $\forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile

2. Se $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$ instabile

3. Se $\Re[\lambda_i] \leq 0$, $\forall i$, e $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$ caso critico!

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \quad \text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0,\ \forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile

2. Se $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$ instabile

3. Se $\Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i$, e $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$ caso critico!

Con una funzione di Lyapunov $V(x)$: **3.1.** $\dot{V}(x)$ semidef. neg. $\Rightarrow \bar{x}$ sempl. stabile

3.2. $\dot{V}(x)$ def. neg. $\Rightarrow \bar{x}$ asint. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.)

extra

Se abbiamo una $V(x)$ con $\dot{V}(x)$ semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di $\bar{x}$?

Teorema di Krasowskii (t.c.)

extra

Se abbiamo una $V(x)$ con $\dot{V}(x)$ semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di $\bar{x}$?

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \dot{V}(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}, \forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile. Altrimenti, $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico ($m = k = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$$

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x_1, x_2) = 0 \right\} = \mathbb{R}^2$$

$\bar{x} = 0$ è sempl. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico ($m = k = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

extra

2. Oscillatore armonico smorzato $(m = k = \nu = 1)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

extra

2. Oscillatore armonico smorzato $(m = k = \nu = 1)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$, semidef. neg.

$$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ asintoticamente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$

$\bar{x}$ sempl. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

extra

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2} x_2^2$$

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

extra

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ asintoticamente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

extra

5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$ $\qquad \bar{x} = 0$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

extra

5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$ $\quad \bar{x} = 0$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2)$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \{x_1 = 0, x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Krasowskii (t.d.)

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \Delta V(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}$, $\forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile. Altrimenti, $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

In questa lezione

- ▷ Teorema di Krasowskii
- ▷ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.c.
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.d.

Funzioni di Lyapunov quadratiche

simmetrica

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

forma quadratica

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

Teorema spettrale

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \boxed{TT^\top = I} \text{ tale che } \underbrace{T^\top}_{=T^{-1}} PT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ TT^\top = I \text{ tale che } T\cancel{^\top}PT^{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \to TPT^{T} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1, x_2) = x^\top T^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{Tx}_{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \underline{\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ TT^\top = I \text{ tale che } T^\top P T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1, x_2) = x^\top T^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{Tx}_{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$\implies \min\{\lambda_1, \lambda_2\} \underset{\|x\|^2}{\underset{\shortparallel}{\|y\|^2}} \leq V(x_1, x_2) \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\} \underset{\|x\|^2}{\underset{\shortparallel}{\|y\|^2}}$$

$y_1^2 + y_2^2 = \|y\|^2$

$\|y\| = \|Tx\| = \|x\|$

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ TT^\top = I \text{ tale che } T^\top P T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1,x_2) = x^\top T^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{Tx}_{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$\implies \min\{\lambda_1,\lambda_2\}\|y\|^2 \le V(x_1,x_2) \le \max\{\lambda_1,\lambda_2\}\|y\|^2$$

$$\boxed{\implies V(x_1,x_2) \text{ (semi)definita positiva} \iff \lambda_1,\lambda_2 > (\ge)\ 0}$$

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k > (\geq)\ 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq)\ 0$.

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > (\geq)\ 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq)\ 0$.

N.B. $P = P^\top$ (semi)definita positiva $\implies$ $V(x) = x^\top P x$ (semi)definita positiva

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > (\geq)\ 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq)\ 0$.

N.B. $P = P^\top$ (semi)definita positiva $\implies$ $V(x) = x^\top P x$ (semi)definita positiva

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita negativa se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k < (\leq)\ 0$. Se P è (semi)definita negativa, scriviamo $P \prec (\preceq)\ 0$.

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k > (\geq)\ 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq)\ 0$.

N.B. $P = P^\top$ (semi)definita positiva $\implies$ $V(x) = x^\top P x$ (semi)definita positiva

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, si dice (semi)definita negativa se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k < (\leq)\ 0$. Se P è (semi)definita negativa, scriviamo $P \prec (\preceq)\ 0$.

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) si dice indefinita se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa.

Test di Sylvester

Fatto: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di P sono positivi.

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{12} & p_{22} & p_{23} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{bmatrix}$$

m_1

$m_2 = \det \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

$m_3 = \det P$

Test di Sylvester

Fatto: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di P sono positivi.

Esempi:

1. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$m_1 = 2 > 0$

$m_2 = \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 1 = 5 > 0$

$m_3 = \det P = 12 - 3 - 2 = 7 > 0$

P def. pos.

2. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$m_1 = 0 \geq 0$

$m_2 = 0 \geq 0$

semidef. neg.

Test di Sylvester

Fatto: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di P sono positivi.

Esempi:

1. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P$ definita positiva

2. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P$ semidefinita negativa

In questa lezione

- ▷ Teorema di Krasowskii
- ▷ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.c.
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.d.

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

$\dot{x}(t) = Fx(t)$, equilibrio $\bar{x} = 0$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top Px,\ P \succ 0$

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

$\dot{x}(t) = Fx(t)$, equilibrio $\bar{x} = 0$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top P x$, $P \succ 0$

$\boxed{\text{Come scegliere } P \text{ affinchè } V(x) \text{ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??}}$

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad$ equilibrio $\bar{x} = 0$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top P x,\ P \succ 0$

$\boxed{\text{Come scegliere } P \text{ affinchè } V(x) \text{ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??}}$

Per il teorema di Lyapunov: $\dot{V}(x)$ deve essere (semi)definita negativa !!

Sistemi lineari e teorema di Lyapunov (t.c.)

$\dot{x} = Fx$ $\qquad$ $P^T F + F^T P^T = PF + F^T P$

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} = \underline{x^\top F^\top P x + x^\top P F x} = x^\top \overbrace{(F^\top P + PF)}x \quad \text{semidef. neg.}$$

$$\implies F^\top P + PF = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad (\text{Equazione di Lyapunov a t.c.})$$

Teorema: Dato un sistema $\dot{x} = Fx$ e una matrice $P \succ 0$:

1. Se $F^\top P + PF = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.
2. Se $F^\top P + PF = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Esempi

$$Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \succ 0$$

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

$$F^T P + P F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

$$F^T P + P F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}}_{Q}$$

$m_1 = 1$

$m_2 = \det Q = 4 - 9 = -5$

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^\top P + PF)$ definita positiva

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^\top P + PF)$ indefinita

Equazione di Lyapunov (t.c.)

extra

$\boxed{\text{Come scegliere } P \text{ affinchè } V(x) \text{ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??}}$

Equazione di Lyapunov (t.c.)

extra

Come scegliere P affinchè $V(x)$ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??

Teorema: Dato un sistema $\dot{x} = Fx$ asintoticamente stabile, per ogni $Q \succ 0$ esiste un'unica matrice $P \succ 0$ tale che

$$F^\top P + PF = -Q.$$

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \int_0^\infty e^{F^\top t} Q e^{Ft} \, dt.$$

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ definita positiva

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$ definita positiva

Test per la stabilità asintotica di sistemi lineari a t.c.

1. Fissare una $Q \succ 0$ (presa a caso)

2. Risolvere il sistema di equazioni lineari $F^\top P + PF = -Q$

2.1 Se il sistema non ammette soluzioni o ne ammette infinite allora il sistema **non è** asintoticamente stabile

2.2 Se il sistema ammette un'unica soluzione allora:

2.2.1 Se $P \succ 0$ allora il sistema **è** asintoticamente stabile

2.2.2 Se $P \not\succ 0$ allora il sistema **non è** asintoticamente stabile

Osservazioni

1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.

Osservazioni

1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.

2. La condizione $P \succ 0$ (verificabile tramite test di Sylvester) è essenziale per determinare al stabilità asintotica e non può essere sostituita con $P \succeq 0$.

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Osservazioni

1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.

2. La condizione $P \succ 0$ (verificabile tramite test di Sylvester) è essenziale per determinare al stabilità asintotica e non può essere sostituita con $P \succeq 0$.

3. Il test è vantaggioso da un punto di vista computazionale. Infatti permette di decidere circa la stabilità asintotica (o meno) del sistema evitando completamente il calcolo esplicito degli autovalori di F (spesso impraticabile per dimensioni $n > 2$) !!

In questa lezione

- ▷ Teorema di Krasowskii
- ▷ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.c.
- ▷ Teorema di Lyapunov: applicazione al caso lineare t.d.

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.d.)

$$x(t+1) = Fx(t), \quad \text{equilibrio } \bar{x} = 0$$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top P x,\ P \succ 0$

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) = x^\top(t+1)Px(t+1) - x^\top(t)Px(t)$$

$$= x^\top(F^\top PF - P)x \quad \text{semidef. neg.}$$

$$\implies F^\top PF - P = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad (\text{Equazione di Lyapunov a t.d.})$$

Sistemi lineari, teorema ed equazione di Lyapunov (t.d.)

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ e una matrice $P \succ 0$:

1. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.

2. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Sistemi lineari, teorema ed equazione di Lyapunov (t.d.)

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ e una matrice $P \succ 0$:

1. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.
2. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ asintoticamente stabile, per ogni $Q \succ 0$ esiste un'unica matrice $P \succ 0$ tale che

$$F^\top PF - P = -Q.$$

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} (F^\top)^t Q F^t.$$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e teorema di Lyapunov per sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it
baggiogi.github.io

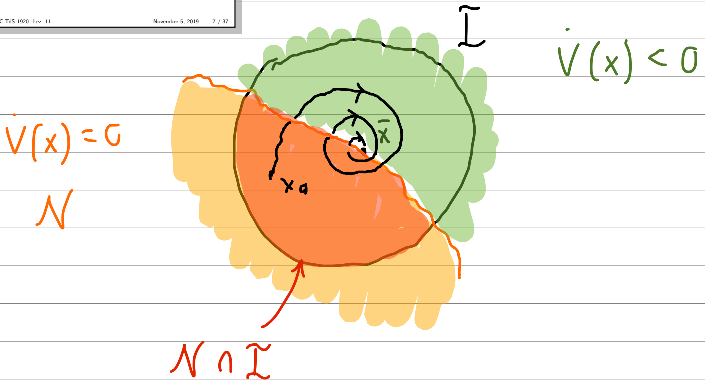
Teorema di Krasowskii (t.c.)

extra

back

Se abbiamo una $V(x)$ con $\dot V(x)$ semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di $\bar x$?

Teorema: Sia
$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \dot V(x) = 0\}.$$
Se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar x$ tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar x$, $\forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora $\bar x$ è asintoticamente stabile. Altrimenti, $\bar x$ è semplicemente stabile.



back

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

extra

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2 \quad \text{semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x_1, x_2) = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0,\ x_1 = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x(t) \in \mathcal{N} \implies x_2(t) = 0 \implies \dot{x}_2(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \implies 0 = -x_1(t) \implies x_1(t) = 0$$

Per Krasowskii $\bar{x}$ è asint. stabile!

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

extra

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

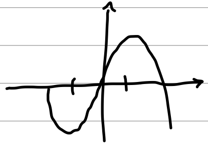
$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$

back

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2 \quad \text{semidef. neg.}$$

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \; x_2 = 0, \; x_1 = \alpha, \; \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$



$$x(t) \in N \Rightarrow x_2(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0$$

$$\dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \Rightarrow g \sin(x_1) = 0 \Rightarrow x_1(t) = 0$$

Per Krasowskii $\bar{x}$ è asint. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

extra

5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$ $\quad \bar{x} = 0$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

back

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)\, x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

V funzione di Lyapunov?

1) $V(x_1, x_2)$ def. pos.

2) $\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = 2x_1(-x_1^3) + 2x_2(-x_1^2 x_2)$

$$= -2x_1^4 - 2x_1^2 x_2^2$$

$$= -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2)$$ semidef. neg.

back

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \ x_1 = 0, \ x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

$$x(t) \in N \Rightarrow x_1(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}_1(t) = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2(t) = \alpha \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ \alpha \end{bmatrix}$$

$\bar{x}$ sempl. stabile

Esempi

extra

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

back

1) $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$F^T P + P F = -Q \qquad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p_{11} & -p_{12} \\ -2p_{12} & -2p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{11} & -2p_{12} \\ -p_{12} & -2p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{11} & -3p_{12} \\ -3p_{12} & -4p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2\,p_{11} = -1 \\ -3\,p_{12} = 0 \\ -4\,p_{22} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{11} = 1/2 \\ p_{12} = 0 \\ p_{22} = 1/4 \end{cases} \qquad P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix} \succ 0$$

2) $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$

$$F^T P + P F = -Q$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -p_{11} & -p_{12} \\ 3p_{11}-p_{12} & 3p_{12}-p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -p_{11} & 3p_{11}-p_{12} \\ -p_{12} & 3p_{12}-p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2p_{11} & 3p_{11}-2p_{12} \\ 3p_{11}-2p_{12} & 6p_{12}-2p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2p_{11} = -1 \\ 3p_{11} - 2p_{12} = 0 \\ 6p_{12} - 2p_{22} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} p_{11} = 1/2 \\ 3 \cdot \frac{1}{2} - 2p_{12} = 0 \implies p_{12} = \frac{3}{4} \\ 6 \cdot \frac{3}{4} - 2p_{22} = -1 \implies 2p_{22} = \frac{18}{4} + 1 \end{cases}$$

$$p_{22} = \frac{18}{8} + \frac{1}{2} = \frac{18+4}{8} = \frac{22}{8}$$

back

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 3/4 \\ 3/4 & \frac{22}{8} \end{bmatrix}$$

$m_1 = 1/2 > 0$

$$m_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{22}{8} - \frac{9}{16} = \frac{22}{16} - \frac{9}{16} > 0$$

$P > 0$