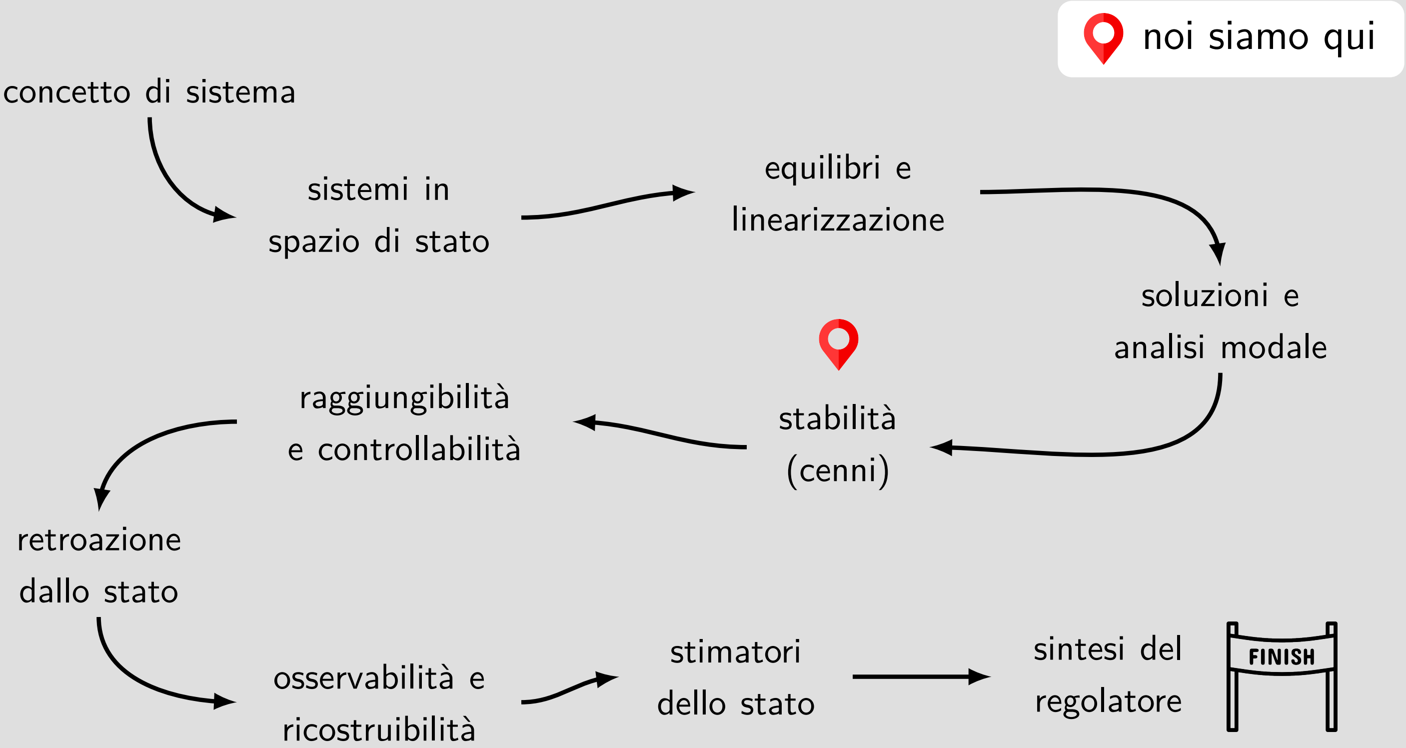
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Criteri di stabilità per sistemi lineari e non lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022


noi siamo qui
concetto di sistema
sistemi in spazio di stato
equilibri e linearizzazione
soluzioni e analisi modale
stabilità (cenni)
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

- Analisi modale ed evoluzione libera di un sistema lineare a t.d.

$x(t) = F^t x(0)$

modi elementari

- Evoluzione complessiva di un sistema lineare a t.d.

$t^k \lambda_i^t$

$\delta(t-k)$

In questa lezione

- Stabilità di sistemi lineari
- Teorema di linearizzazione per la stabilità di sistemi non lineari

Stabilità di sistemi lineari a t.c.

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

Stabilità di sistemi lineari a t.c.

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

modi elementari convergenti

$$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \quad \Longrightarrow \quad \text{sistema asintoticamente stabile}$$

Stabilità di sistemi lineari a t.c.

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i$ $\implies$ sistema asintoticamente stabile

modi limitati

$\Re[\lambda_i] \leq 0, \; \forall i$ e
$\nu_i = g_i$ se $\Re[\lambda_i] = 0$ $\implies$ sistema semplicemente stabile

Stabilità di sistemi lineari a t.c.

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies$ sistema asintoticamente stabile

$\Re[\lambda_i] \leq 0, \ \forall i$ e $\nu_i = g_i$ se $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$ sistema semplicemente stabile

$\exists\, \lambda_i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$ o $\Re[\lambda_i] = 0$ e $\nu_i > g_i \implies$ sistema instabile (= non è sempl. stabile)

modi divergenti

Stabilità di sistemi lineari a t.d.

$$x(t+1) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

Stabilità di sistemi lineari a t.d.

$$x(t+1) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$|\lambda_i| < 1, \forall i \quad \Longrightarrow \quad$ sistema asintoticamente stabile

Stabilità di sistemi lineari a t.d.

$$x(t+1) = Fx(t), \qquad F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$|\lambda_i| < 1, \forall i$ $\quad\Longrightarrow\quad$ sistema asintoticamente stabile

$|\lambda_i| \leq 1,\ \forall i$ e
$\nu_i = g_i$ se $|\lambda_i| = 1$ $\quad\Longrightarrow\quad$ sistema semplicemente stabile

Stabilità di sistemi lineari a t.d.

$$x(t+1) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$\|\lambda_i\| < 1, \forall i$	$\Longrightarrow$	sistema asintoticamente stabile
$\|\lambda_i\| \leq 1,\ \forall i$ e $\nu_i = g_i$ se $\|\lambda_i\| = 1$	$\Longrightarrow$	sistema semplicemente stabile
$\exists\, \lambda_i$ tale che $\|\lambda_i\| > 1$ o $\|\lambda_i\| = 1$ e $\nu_i > g_i$	$\Longrightarrow$	sistema instabile

Stabilità vs. BIBO stabilità

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad\qquad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$
$$y(t) = Hx(t) + Ju(t) \qquad\qquad y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Definizione: Un sistema lineare si dice BIBO stabile se per ogni vettore d'ingresso con componenti limitate in t la corrispondente uscita forzata ha componenti limitate in t.

Stabilità vs. BIBO stabilità

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \qquad\qquad x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t) \qquad\qquad y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$W(s) = H(sI - F)^{-1} + J$

Definizione: Un sistema lineare si dice BIBO stabile se per ogni vettore d'ingresso con componenti limitate in t la corrispondente uscita forzata ha componenti limitate in t.

(t.c.)

Teorema: Siano $\{p_i\}_{i=1}^{r}$ i poli della matrice di trasferimento del sistema ridotta ai minimi termini, *cioè dopo tutte le possibili cancellazioni zero-polo dei suoi elementi.* Il sistema è BIBO stabile se e solo se $\Re[p_i] < 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, r$.

$\hookrightarrow |p_i| < 1$ (t.d.)

$$\boxed{\text{Stabilità asintotica} \implies \text{BIBO stabilità}}$$

$\text{poli}(W(s)) \subseteq \text{autovalori}(F)$

In questa lezione

- ▷ Stabilità di sistemi lineari
- ▷ Teorema di linearizzazione per la stabilità di sistemi non lineari

Teorema di linearizzazione a t.c.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$

Teorema di linearizzazione a t.c.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

matrice Jacobiana di f valutata in $\bar{x}$

Teorema: Sia $\dot{\delta}_x(t) = F\delta_x(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($\Re[\lambda_i] < 0$, $\forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio asintoticamente (localmente) stabile per il sistema non lineare.
2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.

$\|$ non semplicemente stabile

Teorema di linearizzazione a t.c.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

Teorema: Sia $\dot{\delta}_x(t) = F\delta_x(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($\Re[\lambda_i] < 0$, $\forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.

$$\boxed{\text{Caso critico: } \Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i, \text{ e } \exists\, i\text{: } \Re[\lambda_i] = 0}$$

Teorema di linearizzazione a t.c.: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\qquad \bar{x} = 0$, $\quad \bar{x} = \pi$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\dot{x} = \alpha x^3, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0$

note

Teorema di linearizzazione a t.c.: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad$ $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\bar{x} = 0$ instabile, $\bar{x} = \pi$ stabile

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\bar{x}$ instabile

3. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0$ $\quad \Longrightarrow \quad$ caso critico!

note

Teorema di linearizzazione a t.d.

$x(t+1) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

Teorema: Sia $\delta_x(t+1) = F\delta_x(t)$ il sistema linearizzato di $x(t+1) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($|\lambda_i| < 1$, $\forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con modulo maggiore di uno ($\exists i$ tale che $|\lambda_i| > 1$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.

$$\boxed{\text{Caso critico: } |\lambda_i| \leq 1,\ \forall i, \text{ e } \exists\, i\text{: } |\lambda_i| = 1}$$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Criteri di stabilità per sistemi lineari e non lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Teorema di linearizzazione a t.c.: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad \bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\dot{x} = \alpha x^3$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = 0$

note

1) $\dot{x} = \sin x$

$\bar{x} = 0$: $\dot{\delta}_x = \cos(\bar{x})\,\delta_x \longrightarrow \dot{\delta}_x = \underbrace{}_{}\delta_x$ $\quad F = 1$ $\quad \lambda_1 = 1 \rightarrow \bar{x}$ instabile

$\bar{x} = \pi$: $\dot{\delta}_x = \cos(\bar{x})\,\delta_x \longrightarrow \dot{\delta}_x = -\delta_x$ $\quad \lambda_1 = -1 \longrightarrow \bar{x}$ asint. stabile

2) $$\begin{cases} \dot{x}_1 = \overbrace{x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)}^{f_1(x_1,x_2)} \\ \dot{x}_2 = \underbrace{x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)}_{f_2(x_1,x_2)} \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & 1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$F = J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 + 1$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = \frac{2 \pm i2}{2} = 1 \pm i$$

$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] > 0 \longrightarrow \bar{x}$ instabile

3) $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} = 0$

$\dot{\delta}_x = 3\alpha \bar{x}^2 \delta_x = 0 \longrightarrow F = 0 \longrightarrow \lambda_1 = 0 \longrightarrow$ caso critico del teorema di linearizzazione