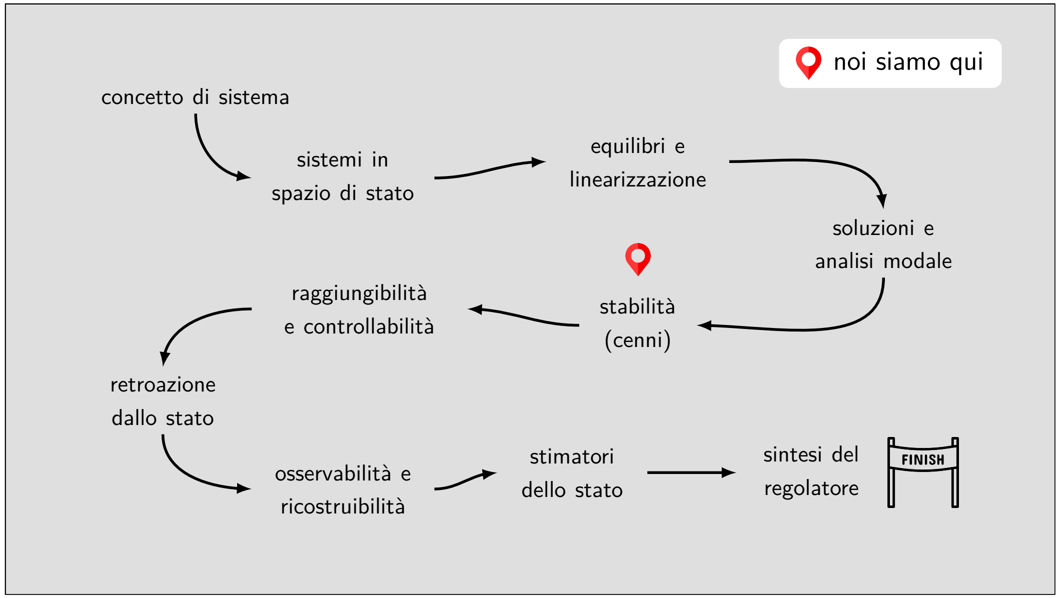
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Criteri di stabilità per sistemi lineari e non lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



In questa lezione

- ▷ Stabilità di sistemi lineari
- ▷ Teorema di linearizzazione per la stabilità di sistemi non lineari

Stabilità di sistemi lineari a t.c.

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^{k}$$

$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i$	$\Longrightarrow$	sistema asintoticamente stabile
$\Re[\lambda_i] \leq 0, \ \forall i$ e $\nu_i = g_i$ se $\Re[\lambda_i] = 0$	$\Longrightarrow$	sistema semplicemente stabile
$\exists\, \lambda_i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$ o $\Re[\lambda_i] = 0$ e $\nu_i > g_i$	$\Longrightarrow$	sistema instabile

Stabilità di sistemi lineari a t.d.

$$x(t+1) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$\lvert\lambda_i\rvert < 1, \forall i$	$\Longrightarrow$	sistema asintoticamente stabile
$\lvert\lambda_i\rvert \leq 1,\ \forall i$ e $\nu_i = g_i$ se $\lvert\lambda_i\rvert = 1$	$\Longrightarrow$	sistema semplicemente stabile
$\exists\, \lambda_i$ tale che $\lvert\lambda_i\rvert > 1$ o $\lvert\lambda_i\rvert = 1$ e $\nu_i > g_i$	$\Longrightarrow$	sistema instabile

Stabilità vs. BIBO stabilità

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Ju(t) \end{aligned}$$

Definizione: Un sistema lineare si dice BIBO stabile se per ogni vettore d'ingresso con componenti limitate in t la corrispondente uscita forzata ha componenti limitate in t.

Teorema: Siano $\{p_i\}_{i=1}^r$ i poli della matrice di trasferimento del sistema ridotta ai minimi termini, *cioè dopo tutte le possibili cancellazioni zero-polo dei suoi elementi*. Il sistema è BIBO stabile se e solo se $\Re[p_i] < 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, r$.

$$\boxed{\text{Stabilità asintotica} \implies \text{BIBO stabilità}}$$

Teorema di linearizzazione a t.c.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

Teorema: Sia $\dot{\delta}_x(t) = F\delta_x(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($\Re[\lambda_i] < 0$, $\forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.

$\boxed{\text{Caso critico: } \Re[\lambda_i] \le 0,\ \forall i, \text{ e } \exists\, i\text{: } \Re[\lambda_i] = 0}$

Teorema di linearizzazione a t.c.: esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad \begin{matrix}\bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi\end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix}\bar{x} = 0 \text{ instabile} \\ \bar{x} = \pi \text{ stabile}\end{matrix}$

2. $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)\end{cases} \quad \begin{bmatrix}\bar{x}_1 \\ \bar{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 \\ 0\end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \bar{x} \text{ instabile}$

3. $\dot{x} = \alpha x^3$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = 0$ $\quad \Longrightarrow \quad$ caso critico!

Teorema di linearizzazione a t.d.

$$x(t+1) = f(x(t))\text{: sistema non lineare con punto di equilibrio } \bar{x}$$

Teorema: Sia $\delta_x(t+1) = F\delta_x(t)$ il sistema linearizzato di $x(t+1) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($|\lambda_i| < 1$, $\forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con modulo maggiore di uno ($\exists i$ tale che $|\lambda_i| > 1$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.

$$\boxed{\text{Caso critico: } |\lambda_i| \leq 1,\ \forall i, \text{ e } \exists\, i\text{: } |\lambda_i| = 1}$$