

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Criteri di stabilità per sistemi lineari e non lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2021-2022



noi siamo qui

concetto di sistema

sistemi in
spazio di stato

equilibri e
linearizzazione

soluzioni e
analisi modale

raggiungibilità
e controllabilità

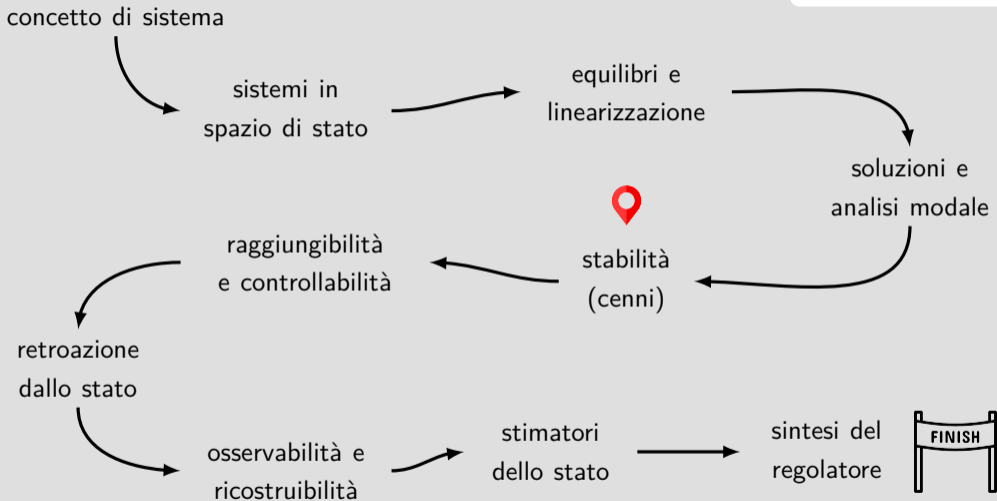
stabilità
(cenni)

retroazione
dallo stato

osservabilità e
ricostruibilità

stimatori
dello stato

sintesi del
regolatore



In questa lezione

- ▷ Stabilità di sistemi lineari
- ▷ Teorema di linearizzazione per la stabilità di sistemi non lineari

Stabilità di sistemi lineari a t.c.

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies$ sistema asintoticamente stabile

$\Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i$ e
 $\nu_i = g_i$ se $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$ sistema semplicemente stabile

$\exists \lambda_i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$
o $\Re[\lambda_i] = 0$ e $\nu_i > g_i \implies$ sistema instabile

Stabilità di sistemi lineari a t.d.

$$x(t+1) = Fx(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ con autovalori } \{\lambda_i\}_{i=1}^k$$

$|\lambda_i| < 1, \forall i \implies$ sistema asintoticamente stabile

$|\lambda_i| \leq 1, \forall i$ e $\nu_i = g_i$ se $|\lambda_i| = 1 \implies$ sistema semplicemente stabile

$\exists \lambda_i$ tale che $|\lambda_i| > 1$
o $|\lambda_i| = 1$ e $\nu_i > g_i \implies$ sistema instabile

Stabilità vs. BIBO stabilità

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t) + Ju(t)$$

Definizione: Un sistema lineare si dice BIBO stabile se per ogni vettore d'ingresso con componenti limitate in t la corrispondente uscita forzata ha componenti limitate in t .

Teorema: Siano $\{p_i\}_{i=1}^r$ i poli della matrice di trasferimento del sistema ridotta ai minimi termini, cioè dopo tutte le possibili cancellazioni zero-polo dei suoi elementi. Il sistema è BIBO stabile se e solo se $\Re[p_i] < 0$ per ogni $i = 1, 2, \dots, r$.

Stabilità asintotica \implies BIBO stabilità

Teorema di linearizzazione a t.c.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio \bar{x}

Teorema: Sia $\dot{\delta}_x(t) = F\delta_x(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ attorno a \bar{x} e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di F . Allora:

- 1 Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($\Re[\lambda_i] < 0, \forall i$), allora \bar{x} è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
- 2 Se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$), allora \bar{x} è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.

Caso critico: $\Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i$, e $\exists i: \Re[\lambda_i] = 0$

Teorema di linearizzazione a t.c.: esempi

$$1. \dot{x} = \sin x \quad \begin{array}{l} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{array} \implies \begin{array}{l} \bar{x} = 0 \text{ instabile} \\ \bar{x} = \pi \text{ stabile} \end{array}$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \bar{x} \text{ instabile}$$

$$3. \dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \bar{x} = 0 \implies \text{caso critico!}$$

Teorema di linearizzazione a t.d.

$x(t+1) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio \bar{x}

Teorema: Sia $\delta_x(t+1) = F\delta_x(t)$ il sistema linearizzato di $x(t+1) = f(x(t))$ attorno a \bar{x} e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di F . Allora:

- 1 Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($|\lambda_i| < 1, \forall i$), allora \bar{x} è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
- 2 Se il sistema linearizzato ha un autovalore con modulo maggiore di uno ($\exists i$ tale che $|\lambda_i| > 1$), allora \bar{x} è un punto di equilibrio instabile per il sistema non lineare.

Caso critico: $|\lambda_i| \leq 1, \forall i$, e $\exists i: |\lambda_i| = 1$