Teorema di Krasowskii (t.c.)

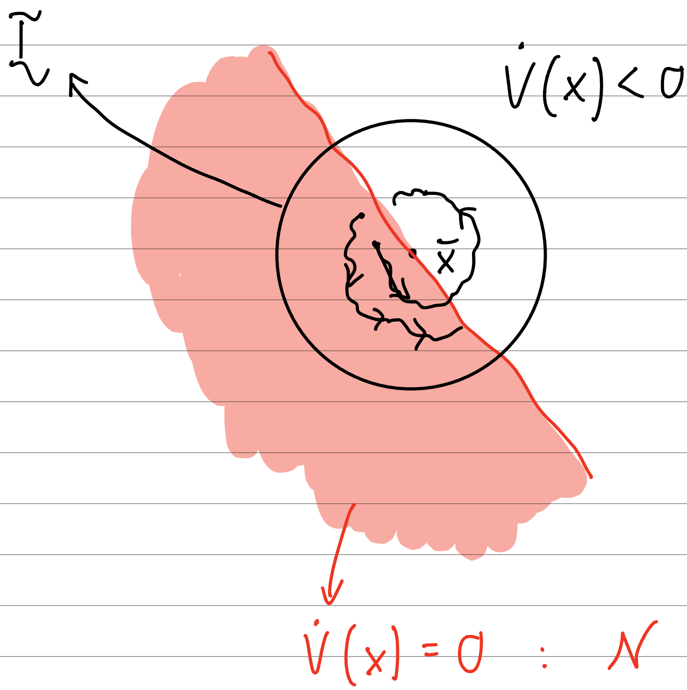
Se abbiamo una $V(x)$ con $\dot{V}(x)$ semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di $\bar{x}$?

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \dot{V}(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}, \forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile. Altrimenti, $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

note



Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

note

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$$

$$\mathcal{N} = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x) = 0 \} = \{ x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_2 = 0 \}$$

$$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_2(t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \Rightarrow 0 = -x_1(t) \Rightarrow x_1(t) = 0 \quad \forall t$$

$\Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ l'unica traiettoria del sistema contenuta in $\mathcal{N}$

$\Rightarrow$ per Krasowskii $\bar{x}$ è asint. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2} x_2^2$$

note

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g \sin x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2 \quad \text{semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x) = 0 \} = \{ x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_2 = 0 \}$$

$$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_2(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0 \ \forall t$$

$$\hookrightarrow \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \Rightarrow 0 = -g \sin(x_1(t))$$

$$\Downarrow$$

$\exists$ un intorno di $\bar{x}$ tale che
$0 = -g \sin(x_1(t)) \Rightarrow x_1(t) = 0$

$$\Downarrow$$

in questo intorno l'unica traiettoria interamente contenuta in $\mathcal{N}$ è

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

per Krasowskii $\bar{x}$ è asint. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$ $\quad \bar{x} = 0$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ $\quad \dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2)$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \{x_1 = 0, x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\implies$ $\bar{x} = 0$ semplicemente stabile

note

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 \, x_2 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

1) V è pos. def. (in un intorno di $\bar{x}$)? Sì

2) $\dot{V}$ è semidef. neg?

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 = -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2)$$ semidef. neg. (in un intorno di $\bar{x}$)

Per il teorema di Lyapunov, $\bar{x}$ è (almeno) semplicemente stabile

Utilizziamo Krasowskii:

$$\mathcal{N} = \{x : \dot{V}(x) = 0\} = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 = 0\}$$

$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_1(t) = 0 \;\; \forall t \Rightarrow \dot{x}_1(t) = 0 \;\; \forall t$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{"} \\ x_2 = \text{cost} \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2,0} \end{bmatrix} \quad x_{2,0} \neq 0 \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2,0} \end{bmatrix} \in \mathcal{N}$$

$\Rightarrow$ Per Krasowskii $\bar{x}$ è (solo) sempl. stabile