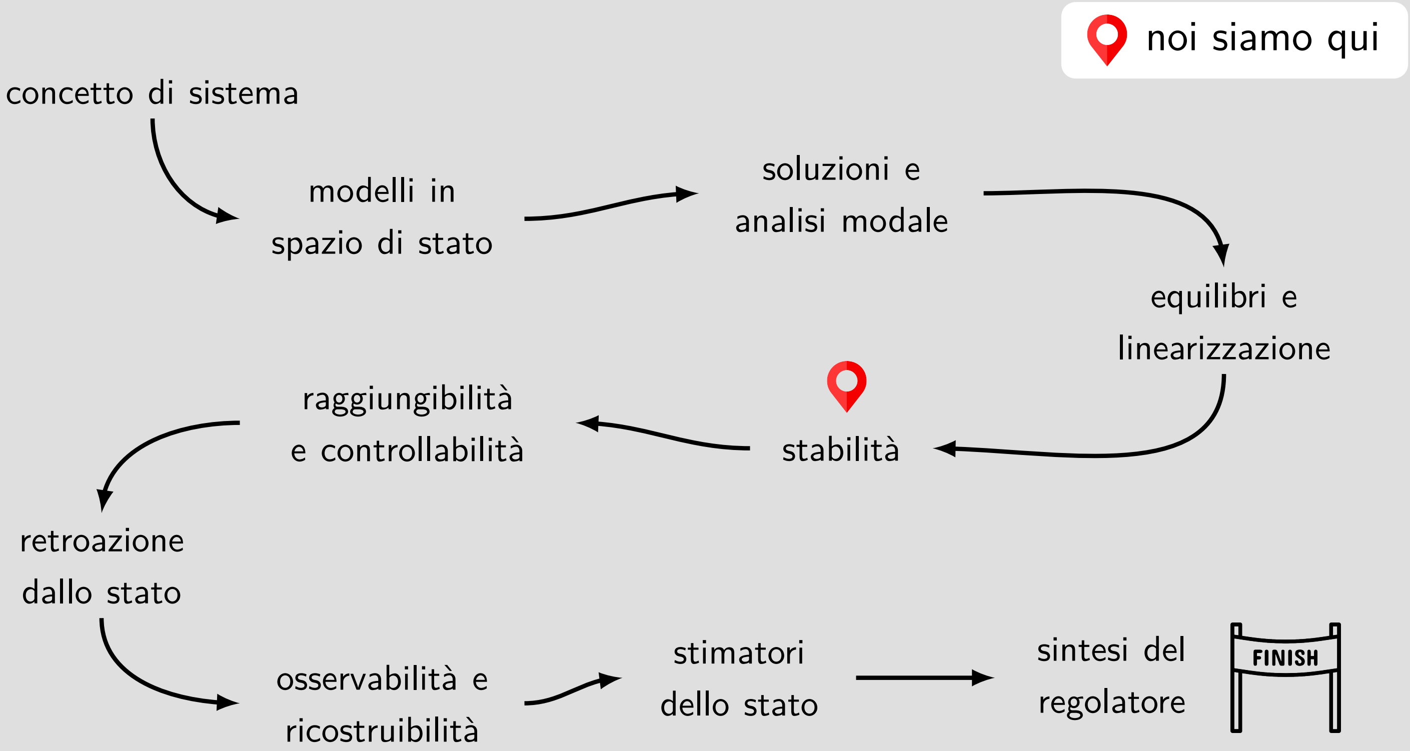
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e teorema di Lyapunov per sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


noi siamo qui
concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

- Teorema di linearizzazione
- Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- Funzioni di Lyapunov
- Teorema di stabilità di Lyapunov

In questa lezione

- Teorema di Krasowskii
- Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.c.
- Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.d.

Ricapitolando...

$J_f(\bar{x})$

$\uparrow$

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$\dot{z} = Fz$, sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ autovalori di F

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \quad \text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0$, $\forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \quad \text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile

2. Se $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$ instabile

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \quad \text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile

2. Se $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$ instabile

3. Se $\Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i$, e $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$ caso critico!

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \quad \text{sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile

2. Se $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$ instabile

3. Se $\Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i$, e $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$ caso critico!

Con una funzione di Lyapunov $V(x)$: **3.1.** $\dot{V}(x)$ semidef. neg. $\Rightarrow \bar{x}$ sempl. stabile

3.2. $\dot{V}(x)$ def. neg. $\Rightarrow \bar{x}$ asint. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.)

Se abbiamo una $V(x)$ con $\dot{V}(x)$ semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di $\bar{x}$?

note

Teorema di Krasowskii (t.c.)

Se abbiamo una $V(x)$ con $\dot{V}(x)$ semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di $\bar{x}$?

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; \dot{V}(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}, \forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile. Altrimenti, $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

note

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico $(m = k = 1)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$$

$$\mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x_1, x_2) = 0\} = \mathbb{R}^2$$

$\bar{x}$ è sempl. stabile per Krasowskii

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico ($m = k = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$$

$\Longrightarrow \quad \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

note

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$, semidef. neg.

$$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ asintoticamente stabile

note

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$$

$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$

per Krasowskii $\bar{x}$ è sempl. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

note

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\Longrightarrow \quad \bar{x} = 0$ asintoticamente stabile

note

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$ $\qquad \bar{x} = 0$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

note

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$ $\qquad \bar{x} = 0$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2)$, semidef. neg.

$$\mathcal{N} = \{x_1 = 0, x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

note

Teorema di Krasowskii (t.d.)

$$x(t+1) = f(x(t)), \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

Teorema: Sia

$V(x(t+1)) - V(x(t))$

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \; : \; \Delta V(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}, \forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile. Altrimenti, $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

In questa lezione

- Teorema di Krasowskii
- Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.c.
- Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.d.

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1,x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ TT^\top = I \text{ tale che } T^\top PT = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ TT^\top = I \text{ tale che } T^\top P T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1, x_2) = x^\top T^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{Tx}_{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ TT^\top = I \text{ tale che } T^\top P T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1, x_2) = x^\top T^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{Tx}_{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$\implies \min\{\lambda_1, \lambda_2\}\|y\|^2 \le V(x_1, x_2) \le \max\{\lambda_1, \lambda_2\}\|y\|^2$$

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ TT^\top = I \text{ tale che } T^\top P T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1, x_2) = x^\top T^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{Tx}_{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$\implies \min\{\lambda_1, \lambda_2\}\|y\|^2 \leq V(x_1, x_2) \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\}\|y\|^2$$

$$\boxed{\implies V(x_1, x_2) \text{ (semi)definita positiva} \iff \lambda_1, \lambda_2 > (\geq)\ 0}$$

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > (\geq)\ 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq)\ 0$.

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > (\geq)\ 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq)\ 0$.

N.B. $P = P^\top$ (semi)definita positiva $\implies$ $V(x) = x^\top P x$ (semi)definita positiva

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > (\geq)\ 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq)\ 0$.

N.B. $P = P^\top$ (semi)definita positiva $\implies V(x) = x^\top P x$ (semi)definita positiva

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita negativa se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k < (\leq)\ 0$. Se P è (semi)definita negativa, scriviamo $P \prec (\preceq)\ 0$.

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k > (\geq)\ 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq)\ 0$.

N.B. $P = P^\top$ (semi)definita positiva $\implies$ $V(x) = x^\top P x$ (semi)definita positiva

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, si dice (semi)definita negativa se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k < (\leq)\ 0$. Se P è (semi)definita negativa, scriviamo $P \prec (\preceq)\ 0$.

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) si dice indefinita se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa.

Test di Sylvester

Fatto: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di P sono positivi.

Test di Sylvester

Fatto: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di P sono positivi.

Esempi:

1. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

2. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Test di Sylvester

Fatto: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di P sono positivi.

Esempi:

1. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P$ definita positiva

2. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P$ semidefinita negativa

In questa lezione

- ▷ Teorema di Krasowskii
- ▷ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▷ Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.c.
- ▷ Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.d.

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad$ equilibrio $\bar{x} = 0$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top Px$, $P \succ 0$

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad$ equilibrio $\bar{x} = 0$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top P x$, $P \succ 0$

$\boxed{\text{Come scegliere } P \text{ affinchè } V(x) \text{ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??}}$

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad$ equilibrio $\bar{x} = 0$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top P x$, $P \succ 0$

$\boxed{\text{Come scegliere } P \text{ affinchè } V(x) \text{ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??}}$

Per il teorema di Lyapunov: $\dot{V}(x)$ deve essere (semi)definita negativa !!

Sistemi lineari e teorema di Lyapunov (t.c.)

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} = x^\top F^\top P x + x^\top P F x = x^\top (F^\top P + PF) x \quad \text{semidef. neg.}$$

$$\Longrightarrow \; F^\top P + PF = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad (\text{Equazione di Lyapunov a t.c.})$$

Teorema: Dato un sistema $\dot{x} = Fx$ e una matrice $P \succ 0$:

1. Se $F^\top P + PF = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.
2. Se $F^\top P + PF = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^\top P + PF)$ definita positiva

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^\top P + PF)$ indefinita

Equazione di Lyapunov (t.c.)

$\boxed{\text{Come scegliere } P \text{ affinchè } V(x) \text{ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??}}$

note

Equazione di Lyapunov (t.c.)

Come scegliere P affinchè $V(x)$ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??

Teorema: Dato un sistema $\dot{x} = Fx$ asintoticamente stabile, per ogni $Q \succ 0$ esiste un'unica matrice $P \succ 0$ tale che

$$F^\top P + PF = -Q.$$

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \int_0^\infty e^{F^\top t} Q e^{Ft} \mathrm{d}t.$$

note

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0$

note

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ definita positiva

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$ definita positiva

note

Test per la stabilità asintotica di sistemi lineari a t.c.

1. Fissare una $Q \succ 0$ (presa a caso)

2. Risolvere il sistema di equazioni lineari $F^\top P + PF = -Q$

2.1 Se il sistema non ammette soluzioni o ne ammette infinite allora il sistema **non è** asintoticamente stabile

2.2 Se il sistema ammette un'unica soluzione allora:

2.2.1 Se $P \succ 0$ allora il sistema **è** asintoticamente stabile

2.2.2 Se $P \not\succ 0$ allora il sistema **non è** asintoticamente stabile

Osservazioni

1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.

Osservazioni

1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.

2. La condizione $P \succ 0$ (verificabile tramite test di Sylvester) è essenziale per determinare al stabilità asintotica e non può essere sostituita con $P \succeq 0$.

Osservazioni

1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.

2. La condizione $P \succ 0$ (verificabile tramite test di Sylvester) è essenziale per determinare al stabilità asintotica e non può essere sostituita con $P \succeq 0$.

3. Il test è vantaggioso da un punto di vista computazionale. Infatti permette di decidere circa la stabilità asintotica (o meno) del sistema evitando completamente il calcolo esplicito degli autovalori di F (spesso impraticabile per dimensioni $n > 2$) !!

In questa lezione

- Teorema di Krasowskii
- Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.c.
- Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.d.

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.d.)

$$x(t+1) = Fx(t), \quad \text{equilibrio } \bar{x} = 0$$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top P x$, $P \succ 0$

$$\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) = x^\top(t+1)Px(t+1) - x^\top(t)Px(t)$$

$$= x^\top(F^\top PF - P)x \quad \text{semidef. neg.}$$

$$\Longrightarrow \; F^\top PF - P = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad \text{(Equazione di Lyapunov a t.d.)}$$

Sistemi lineari, teorema ed equazione di Lyapunov (t.d.)

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ e una matrice $P \succ 0$:

1. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.
2. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Sistemi lineari, teorema ed equazione di Lyapunov (t.d.)

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ e una matrice $P \succ 0$:

1. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.
2. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ asintoticamente stabile, per ogni $Q \succ 0$ esiste un'unica matrice $P \succ 0$ tale che

$$F^\top PF - P = -Q.$$

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} (F^\top)^t Q F^t.$$

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e teorema di Lyapunov per sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Teorema di Krasowskii (t.c.)

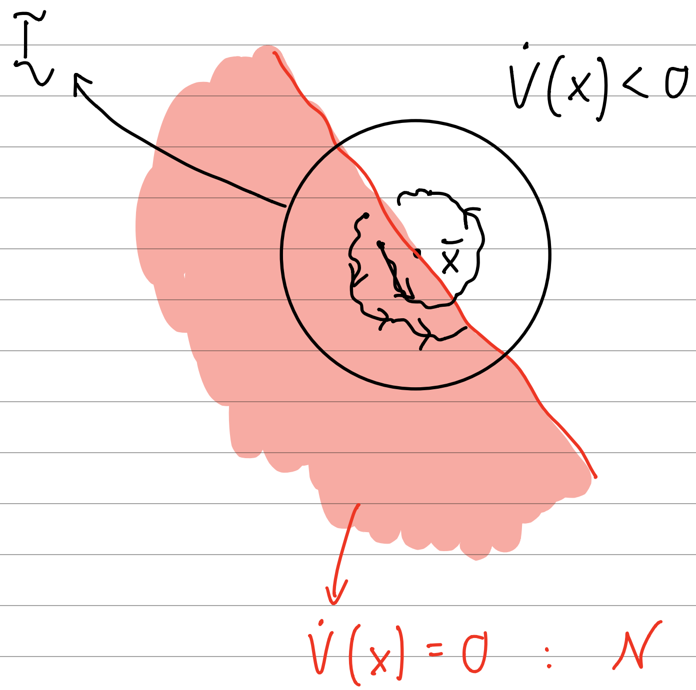
Se abbiamo una $V(x)$ con $\dot{V}(x)$ semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di $\bar{x}$?

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \dot{V}(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}, \forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile. Altrimenti, $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

note



Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot x_1(t) \\ \dot x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar x = 0$$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$$\begin{bmatrix} \dot x_1 \\ \dot x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \bar x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\dot V(x_1, x_2) = -x_2^2$$

$$\mathcal{N} = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \dot V(x) = 0 \} = \{ x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_2 = 0 \}$$

$$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_2(t) = 0 \ \ \forall t \Rightarrow \dot x_2(t) = 0 \ \ \forall t$$

$$\dot x_2(t) = -x_1(t) - x_2(t) \Rightarrow 0 = -x_1(t) \Rightarrow x_1(t) = 0 \ \ \forall t$$

$\Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ l'unica traiettoria del sistema contenuta in $\mathcal{N}$

$\Rightarrow$ per Krasowskii $\bar x$ è asint. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2} x_2^2$$

note

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g \sin x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$ semidef. neg.

$$\mathcal{N} = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \dot{V}(x) = 0 \} = \{ x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_2 = 0 \}$$

$$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_2(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \dot{x}_2(t) = 0 \ \forall t$$

$$\hookrightarrow \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \Rightarrow 0 = -g \sin(x_1(t))$$

$\Downarrow$

$\exists$ un intorno di $\bar{x}$ tale che
$0 = -g \sin(x_1(t)) \Rightarrow x_1(t) = 0$

$\Downarrow$

in questo intorno l'unica traiettoria
interamente contenuta in $\mathcal{N}$ è

$$x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

per Krasowskii $\bar{x}$ è asint. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$ $\quad \bar{x} = 0$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ $\quad \dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2)$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \{x_1 = 0, x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\implies \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1^2 \, x_2 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

1) V è pos. def. (in un intorno di $\bar{x}$)? Sì

2) $\dot{V}$ è semidef. neg?

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 = -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2)$$

semidef. neg. (in un intorno di $\bar{x}$)

Per il teorema di Lyapunov, $\bar{x}$ è (almeno) semplicemente stabile

Utilizziamo Krasowskii:

$\mathcal{N} = \{x : \dot{V}(x) = 0\} = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 = 0\}$

$x(t) \in \mathcal{N} \Rightarrow x_1(t) = 0 \ \forall t \Rightarrow \dot{x}_1(t) = 0 \ \forall t$

$\begin{cases} 0 = 0 \\ \dot{x}_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} '' \\ x_2 = \text{cost} \neq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2,0} \end{bmatrix}$ $x_{2,0} \neq 0 \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_{2,0} \end{bmatrix} \in \mathcal{N}$

$\Rightarrow$ Per Krasowskii $\bar{x}$ è (solo) sempl. stabile