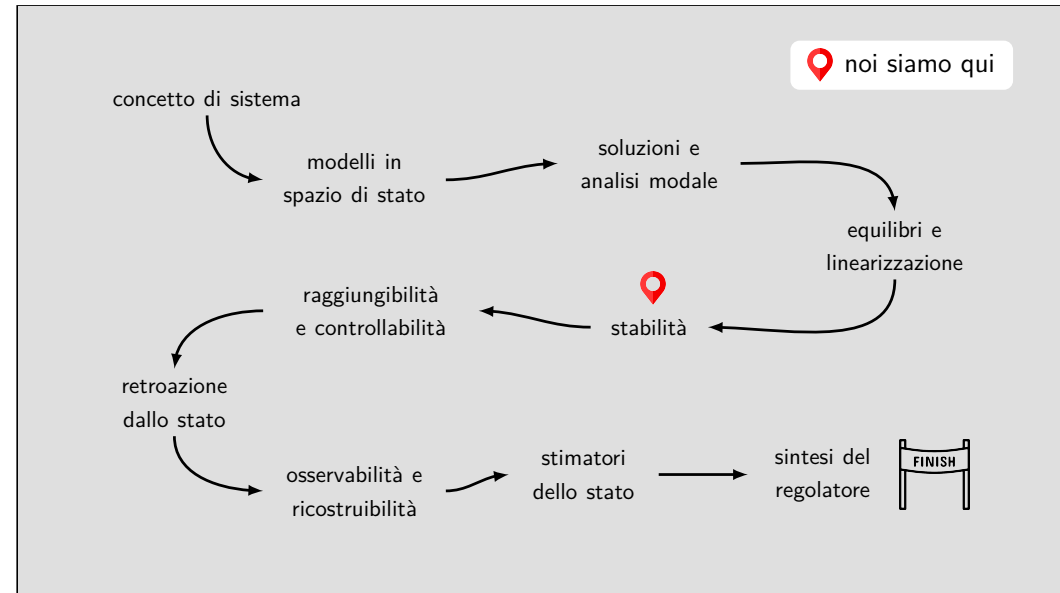


Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.) Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e teorema di Lyapunov per sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica
A.A. 2020-2021



In questa lezione

- ▷ Teorema di Krasowskii
- ▷ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▷ Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.c.
- ▷ Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.d.

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$$\dot{z} = Fz, \quad \text{ sistema linearizzato attorno a } \bar{x}, \quad \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \text{ autovalori di } F$$

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile
2. Se $\exists i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$ instabile
3. Se $\Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i$, e $\exists i$ tale che $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$ caso critico!

Con una funzione di Lyapunov $V(x)$: **3.1.** $\dot{V}(x)$ semidef. neg. $\implies \bar{x}$ sempl. stabile

3.2. $\dot{V}(x)$ def. neg. $\implies \bar{x}$ asint. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.)

Se abbiamo una $V(x)$ con $\dot{V}(x)$ semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di \bar{x} ?

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno \mathcal{I} di \bar{x} tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}, \forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora \bar{x} è asintoticamente stabile. Altrimenti, \bar{x} è semplicemente stabile.

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico ($m = k = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 0, \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$$

$$\implies \bar{x} = 0 \text{ semplicemente stabile}$$

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2, \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\implies \bar{x} = 0 \text{ asintoticamente stabile}$$

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 0, \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$$

$$\implies \bar{x} = 0 \text{ semplicemente stabile}$$

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2 \quad \dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2, \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\implies \bar{x} = 0$ asintoticamente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

$$5. \begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases} \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2), \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \{x_1 = 0, x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\implies \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Krasowskii (t.d.)

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n : \Delta V(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno \mathcal{I} di \bar{x} tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}, \forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora \bar{x} è asintoticamente stabile. Altrimenti, \bar{x} è semplicemente stabile.

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^T \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, TT^T = I \text{ tale che } T^T P T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1, x_2) = x^T T^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{T x}_y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$\implies \min\{\lambda_1, \lambda_2\} \|y\|^2 \leq V(x_1, x_2) \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\} \|y\|^2$$

$$\implies V(x_1, x_2) \text{ (semi)definita positiva} \iff \lambda_1, \lambda_2 > (\geq) 0$$

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^T$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > (\geq) 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq) 0$.

N.B. $P = P^T$ (semi)definita positiva $\implies V(x) = x^T P x$ (semi)definita positiva

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^T$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita negativa se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k < (\leq) 0$. Se P è (semi)definita negativa, scriviamo $P \prec (\preceq) 0$.

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^T$) si dice indefinita se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa.

Test di Sylvester

Fatto: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^T$) è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di P sono positivi.

Esempi:

$$1. P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \implies P \text{ definita positiva}$$

$$2. P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \implies P \text{ semidefinita negativa}$$

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad \text{equilibrio } \bar{x} = 0$$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^T P x$, $P \succ 0$

Come scegliere P affinché $V(x)$ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??

Per il teorema di Lyapunov: $\dot{V}(x)$ deve essere (semi)definita negativa !!

Sistemi lineari e teorema di Lyapunov (t.c.)

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T F^T P x + x^T P F x = x^T (F^T P + P F) x \quad \text{semidef. neg.}$$

$$\implies F^T P + P F = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad (\text{Equazione di Lyapunov a t.c.})$$

Teorema: Dato un sistema $\dot{x} = Fx$ e una matrice $P \succ 0$:

- 1 Se $F^T P + P F = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.
- 2 Se $F^T P + P F = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^T P + PF)$ definita positiva

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^T P + PF)$ indefinita

Equazione di Lyapunov (t.c.)

Come scegliere P affinché $V(x)$ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??

Teorema: Dato un sistema $\dot{x} = Fx$ asintoticamente stabile, per ogni $Q \succ 0$ esiste un'unica matrice $P \succ 0$ tale che

$$F^T P + PF = -Q.$$

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \int_0^{\infty} e^{F^T t} Q e^{Ft} dt.$$

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ definita positiva

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$ definita positiva

Test per la stabilità asintotica di sistemi lineari a t.c.

1. Fissare una $Q \succ 0$ (presa a caso)

2. Risolvere il sistema di equazioni lineari $F^T P + PF = -Q$

2.1 Se il sistema non ammette soluzioni o ne ammette infinite allora il sistema **non** è asintoticamente stabile

2.2 Se il sistema ammette un'unica soluzione allora:

2.2.1 Se $P \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile

2.2.2 Se $P \not\succeq 0$ allora il sistema **non** è asintoticamente stabile

Osservazioni

1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.
2. La condizione $P \succ 0$ (verificabile tramite test di Sylvester) è essenziale per determinare la stabilità asintotica e non può essere sostituita con $P \succeq 0$.
3. Il test è vantaggioso da un punto di vista computazionale. Infatti permette di decidere circa la stabilità asintotica (o meno) del sistema **evitando completamente il calcolo esplicito degli autovalori di F** (spesso impraticabile per dimensioni $n > 2$) !!

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.d.)

$$x(t+1) = Fx(t), \quad \text{equilibrio } \bar{x} = 0$$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^T P x$, $P \succ 0$

$$\begin{aligned} \Delta V(x(t)) &= V(x(t+1)) - V(x(t)) = x^T(t+1) P x(t+1) - x^T(t) P x(t) \\ &= x^T (F^T P F - P) x \quad \text{semidef. neg.} \end{aligned}$$

$$\implies F^T P F - P = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad (\text{Equazione di Lyapunov a t.d.})$$

Sistemi lineari, teorema ed equazione di Lyapunov (t.d.)

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ e una matrice $P \succ 0$:

- 1 Se $F^T P F - P = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.
- 2 Se $F^T P F - P = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ asintoticamente stabile, per ogni $Q \succ 0$ esiste un'unica matrice $P \succ 0$ tale che

$$F^T P F - P = -Q.$$

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} (F^T)^t Q F^t.$$