Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 11: Teorema di Krasowskii e teorema di Lyapunov per sistemi lineari

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

noi siamo qui

concetto di sistema

modelli in spazio di stato

soluzioni e analisi modale

equilibri e linearizzazione

stabilità

raggiungibilità e controllabilità

retroazione dallo stato

osservabilità e ricostruibilità

stimatori dello stato

sintesi del regolatore

FINISH

In questa lezione

- ▷ Teorema di Krasowskii
- ▷ Forme quadratiche e matrici (semi)definite positive
- ▷ Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.c.
- ▷ Teorema di Lyapunov per sistemi lineari a t.d.

Ricapitolando...

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

$\dot{z} = Fz$, sistema linearizzato attorno a $\bar{x}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ autovalori di F

1. Se $\Re[\lambda_i] < 0, \forall i \implies \bar{x}$ asintoticamente stabile

2. Se $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0 \implies \bar{x}$ instabile

3. Se $\Re[\lambda_i] \leq 0, \forall i$, e $\exists\, i$ tale che $\Re[\lambda_i] = 0 \implies$ caso critico!

Con una funzione di Lyapunov $V(x)$: **3.1.** $\dot{V}(x)$ semidef. neg. $\Rightarrow \bar{x}$ sempl. stabile

3.2. $\dot{V}(x)$ def. neg. $\Rightarrow \bar{x}$ asint. stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.)

Se abbiamo una $V(x)$ con $\dot{V}(x)$ semidefinita negativa riusciamo a dire qualcosa riguardo alla **stabilità asintotica** di $\bar{x}$?

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \dot{V}(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}, \forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile. Altrimenti, $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico ($m = k = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato $(m = k = \nu = 1)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2, \text{ semidef. neg.}$$

$$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{x} = 0 \text{ asintoticamente stabile}$$

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2} x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \mathbb{R}^2$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito $(m = \ell = \nu = 1)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$, semidef. neg.

$$\mathcal{N} = \{x_1 = \alpha, x_2 = 0, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$\implies \quad \bar{x} = 0$ asintoticamente stabile

Teorema di Krasowskii (t.c.): esempi

5. $\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1^2(t)x_2(t) \end{cases}$ $\quad \bar{x} = 0$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(x_1^2 + x_2^2)$, semidef. neg.

$\mathcal{N} = \{x_1 = 0, x_2 = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}$

$\Longrightarrow \quad \bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Krasowskii (t.d.)

$$x(t+1) = f(x(t)), \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ equilibrio}$$

Teorema: Sia

$$\mathcal{N} \triangleq \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, \Delta V(x) = 0\}.$$

Se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che non esiste alcuna traiettoria (diversa da quella banale $x(t) = \bar{x}$, $\forall t$) che sia interamente contenuta in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$, allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile. Altrimenti, $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

Funzioni di Lyapunov quadratiche

$$V(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}}_{=P} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=x} = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + 2p_{12}x_1x_2$$

$$P = P^\top \implies \exists T \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ TT^\top = I \text{ tale che } T^\top P T = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\implies V(x_1, x_2) = x^\top T^\top \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \underbrace{Tx}_{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$$

$$\implies \min\{\lambda_1, \lambda_2\}\|y\|^2 \leq V(x_1, x_2) \leq \max\{\lambda_1, \lambda_2\}\|y\|^2$$

$$\boxed{\implies V(x_1, x_2) \text{ (semi)definita positiva} \iff \lambda_1, \lambda_2 > (\geq)\ 0}$$

Matrici (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita positiva se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k > (\geq)\ 0$. Se P è (semi)definita positiva, scriviamo $P \succ (\succeq)\ 0$.

N.B. $P = P^\top$ (semi)definita positiva $\implies$ $V(x) = x^\top P x$ (semi)definita positiva

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) con autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, si dice (semi)definita negativa se $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k < (\leq)\ 0$. Se P è (semi)definita negativa, scriviamo $P \prec (\preceq)\ 0$.

Definizione: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) si dice indefinita se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa.

Test di Sylvester

Fatto: Una matrice $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simmetrica ($P = P^\top$) è definita positiva se e solo se tutti i minori principali (nord-ovest) di P sono positivi.

Esempi:

1. $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P$ definita positiva

2. $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P$ semidefinita negativa

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.c.)

$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad$ equilibrio $\bar{x} = 0$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top Px$, $P \succ 0$

$\boxed{\text{Come scegliere } P \text{ affinchè } V(x) \text{ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??}}$

Per il teorema di Lyapunov: $\dot{V}(x)$ deve essere (semi)definita negativa !!

Sistemi lineari e teorema di Lyapunov (t.c.)

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^\top P x + x^\top P \dot{x} = x^\top F^\top P x + x^\top P F x = x^\top (F^\top P + PF) x \quad \text{semidef. neg.}$$

$$\implies F^\top P + PF = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad (\text{Equazione di Lyapunov a t.c.})$$

Teorema: Dato un sistema $\dot{x} = Fx$ e una matrice $P \succ 0$:

1. Se $F^\top P + PF = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.
2. Se $F^\top P + PF = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^\top P + PF)$ definita positiva

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies Q = -(F^\top P + PF)$ indefinita

Equazione di Lyapunov (t.c.)

Come scegliere P affinchè $V(x)$ sia una funzione di Lyapunov per il sistema ??

Teorema: Dato un sistema $\dot{x} = Fx$ asintoticamente stabile, per ogni $Q \succ 0$ esiste un'unica matrice $P \succ 0$ tale che

$$F^\top P + PF = -Q.$$

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \int_0^\infty e^{F^\top t} Q e^{Ft} \mathrm{d}t.$$

Esempi

1. $F = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ definita positiva

2. $F = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \succ 0 \implies P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{11}{4} \end{bmatrix}$ definita positiva

Test per la stabilità asintotica di sistemi lineari a t.c.

1. Fissare una $Q \succ 0$ (presa a caso)

2. Risolvere il sistema di equazioni lineari $F^\top P + PF = -Q$

2.1 Se il sistema non ammette soluzioni o ne ammette infinite allora il sistema **non è** asintoticamente stabile

2.2 Se il sistema ammette un'unica soluzione allora:

2.2.1 Se $P \succ 0$ allora il sistema **è** asintoticamente stabile

2.2.2 Se $P \not\succ 0$ allora il sistema **non è** asintoticamente stabile

Osservazioni

1. Il test non permette di concludere nulla circa la stabilità semplice del sistema.

2. La condizione $P \succ 0$ (verificabile tramite test di Sylvester) è essenziale per determinare al stabilità asintotica e non può essere sostituita con $P \succeq 0$.

3. Il test è vantaggioso da un punto di vista computazionale. Infatti permette di decidere circa la stabilità asintotica (o meno) del sistema evitando completamente il calcolo esplicito degli autovalori di F (spesso impraticabile per dimensioni $n > 2$) !!

Sistemi lineari e funzioni di Lyapunov quadratiche (t.d.)

$$x(t+1) = Fx(t), \quad \text{equilibrio } \bar{x} = 0$$

Consideriamo la forma quadratica: $V(x) = x^\top P x$, $P \succ 0$

$$\begin{aligned}\Delta V(x(t)) = V(x(t+1)) - V(x(t)) &= x^\top(t+1) P x(t+1) - x^\top(t) P x(t) \\ &= x^\top(F^\top P F - P)x \quad \text{semidef. neg.}\end{aligned}$$

$$\implies F^\top P F - P = -Q, \quad Q \succeq 0 \quad (\text{Equazione di Lyapunov a t.d.})$$

Sistemi lineari, teorema ed equazione di Lyapunov (t.d.)

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ e una matrice $P \succ 0$:

1. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succeq 0$ allora il sistema è semplicemente stabile.
2. Se $F^\top PF - P = -Q$ con $Q \succ 0$ allora il sistema è asintoticamente stabile.

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = Fx(t)$ asintoticamente stabile, per ogni $Q \succ 0$ esiste un'unica matrice $P \succ 0$ tale che

$$F^\top PF - P = -Q.$$

Inoltre P è data dall'espressione

$$P = \sum_{t=0}^{\infty} (F^\top)^t Q F^t.$$