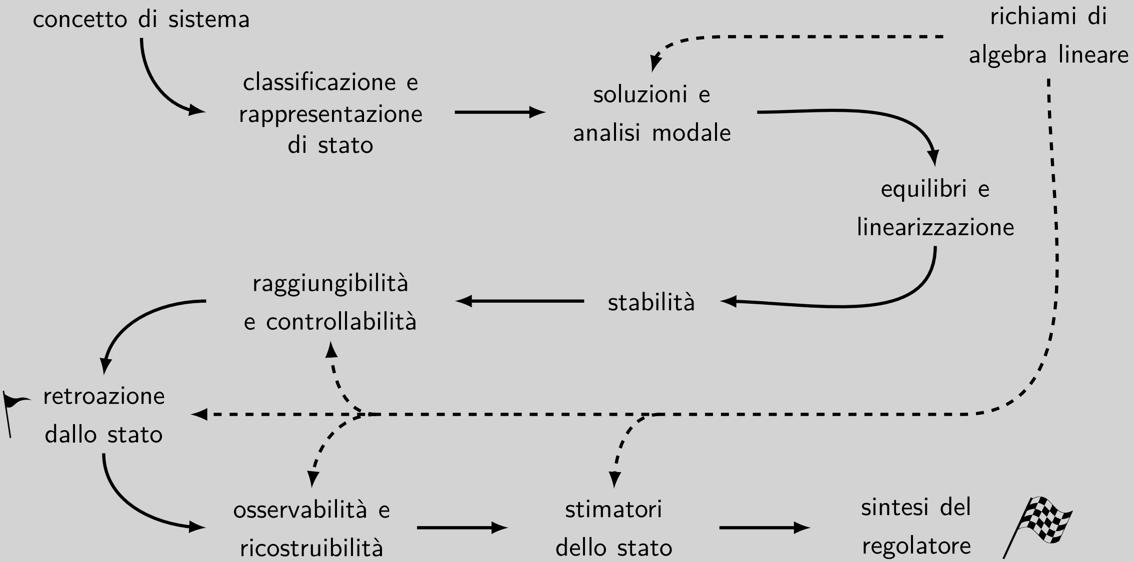
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

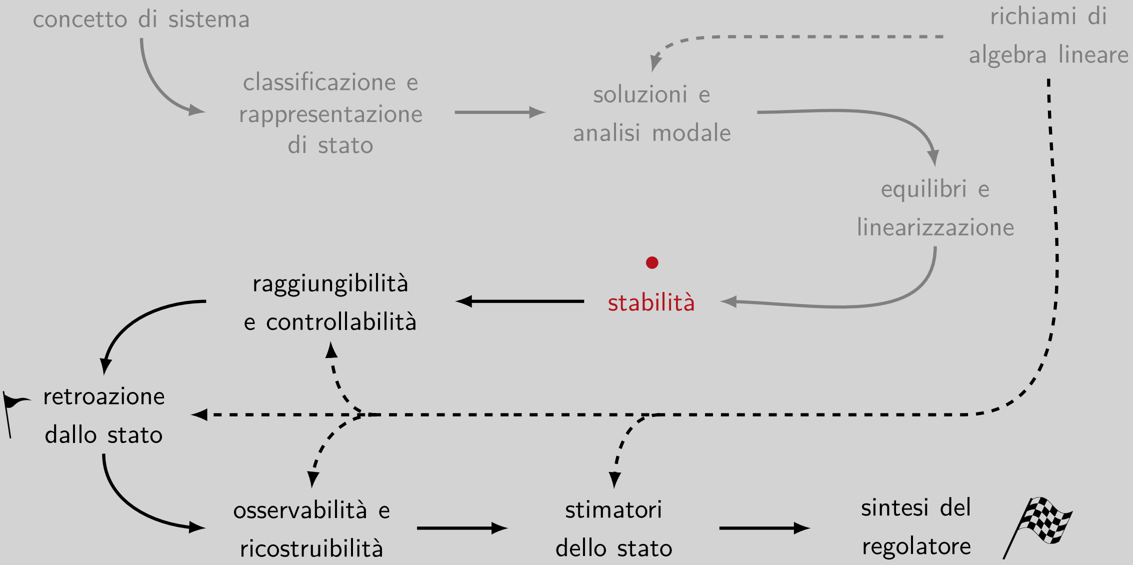
Docente: Giacomo Baggio

Lez. 10: Teorema di Linearizzazione e di Lyapunov

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020


concetto di sistema
richiami di algebra lineare
classificazione e rappresentazione di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
raggiungibilità e controllabilità
stabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore



• noi siamo qui

Nella scorsa lezione

- Traiettorie di stato di un sistema
- Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi)
- Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- Linearizzazione di sistemi non lineari

In questa lezione

- ▷ Teorema di linearizzazione
- ▷ Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Funzioni di Lyapunov
- ▷ Teorema di stabilità di Lyapunov

In questa lezione

- ▷ Teorema di linearizzazione
- ▷ Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Funzioni di Lyapunov
- ▷ Teorema di stabilità di Lyapunov

Teorema di linearizzazione (t.c.)

$\hookrightarrow$ non lineare

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

Sviluppo di Taylor f:

$$f(x) = f(\bar{x}) + J_f(\bar{x})(x - \bar{x}) + \dots$$

$$\dot{z}(t) = F\, z(t), \quad F = J_f(\bar{x}) \qquad z := x - \bar{x}$$

Teorema di linearizzazione (t.c.)

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

Teorema: Sia $\dot{z}(t) = Fz(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($\Re[\lambda_i] < 0,\ \forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i\colon\ \Re[\lambda_i] > 0$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) instabile per il sistema non lineare.

Teorema di linearizzazione (t.c.)

$$\dot{x}(t) = f(x(t))\text{: sistema non lineare con punto di equilibrio } \bar{x}$$

Teorema: Sia $\dot{z}(t) = Fz(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($\Re[\lambda_i] < 0$, $\forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i$: $\Re[\lambda_i] > 0$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) instabile per il sistema non lineare.

$\boxed{\text{Caso critico: } \Re[\lambda_i] \leq 0,\ \forall i, \text{ e } \exists\, i\text{: } \Re[\lambda_i] = 0}$

Teorema di linearizzazione (t.c.): esempi

extra

1. $\dot{x} = \sin x \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= 0 \\ \bar{x} &= \pi \end{aligned}$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\dot{x} = \alpha x^3, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0$

Teorema di linearizzazione (t.c.): esempi

extra

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad$ $\begin{array}{l} \bar{x} = 0 \\ \bar{x} = \pi \end{array}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\begin{array}{l} \bar{x} = 0 \text{ instabile} \\ \bar{x} = \pi \text{ stabile} \end{array}$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\bar{x}$ instabile

3. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \bar{x} = 0$ $\quad \Longrightarrow \quad$ caso critico

Teorema di linearizzazione (t.d.)

$$x(t+1) = f(x(t)) \text{: sistema non lineare con punto di equilibrio } \bar{x}$$

Teorema: Sia $z(t+1) = Fz(t)$ il sistema linearizzato di $x(t+1) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($|\lambda_i| < 1$, $\forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema non lineare.

2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con modulo maggiore di uno ($\exists i\colon\ |\lambda_i| > 1$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) instabile per il sistema non lineare.

$$\boxed{\text{Caso critico: } |\lambda_i| \leq 1,\ \forall i, \text{ e } \exists\, i\colon\ |\lambda_i| = 1}$$

Teorema di linearizzazione (t.d.): esempi

extra

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a x_2(t) + (1-a) x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = -a x_1(t) + (a-1) x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.

Teorema di linearizzazione (t.d.): esempi

extra

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = ax_2(t) + (1-a)x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = -ax_1(t) + (a-1)x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.

$\bar{x} = 0$ asintoticamente stabile per $|a| < 1$

$\bar{x} = 0$ instabile per $|a| > 1$

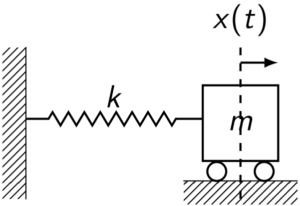
$a = \pm 1$: caso critico !

In questa lezione

- ▷ Teorema di linearizzazione
- ▷ Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Funzioni di Lyapunov
- ▷ Teorema di stabilità di Lyapunov

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico

extra

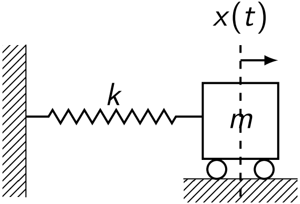


$$x_1(t) = x(t),\ x_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico

extra



$$x_1(t) = x(t),\ x_2(t) = \dot{x}(t)$$

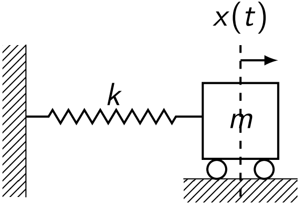
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$E_{\text{pot}}(t) = \tfrac{1}{2} k x_1^2(t), \quad E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2} m x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{m}}(t) &= E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) \\ &= \tfrac{1}{2} k x_1^2(t) + \tfrac{1}{2} m x_2^2(t) \end{aligned}$$

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico

extra



$$x_1(t) = x(t),\ x_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

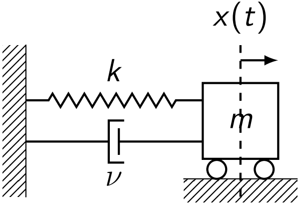
$$E_{\rm pot}(t) = \tfrac{1}{2} k x_1^2(t), \quad E_{\rm cin}(t) = \tfrac{1}{2} m x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\rm tot}(t) = E_{\rm m}(t) &= E_{\rm pot}(t) + E_{\rm cin}(t) \\ &= \tfrac{1}{2} k x_1^2(t) + \tfrac{1}{2} m x_2^2(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\rm m}(t) = E(x_1(t), x_2(t)) = \text{costante},\ \forall t}$$

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico smorzato

extra

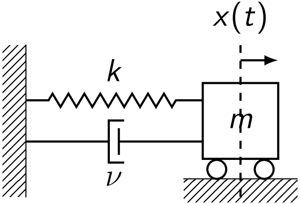


$$x_1(t) = x(t),\ x_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico smorzato

extra



$$x_1(t) = x(t),\ x_2(t) = \dot{x}(t)$$

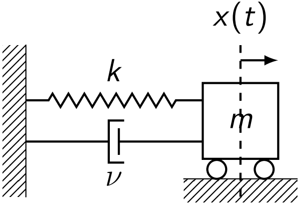
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$E_{\text{pot}}(t) = \tfrac{1}{2} k x_1^2(t), \quad E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2} m x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) &= E_{\text{m}}(t) + E_{\text{attr}}(t) = E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{attr}}(t) \\ &= \tfrac{1}{2} k x_1^2(t) + \tfrac{1}{2} m x_2^2(t) + E_{\text{attr}}(t) \end{aligned}$$

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico smorzato

extra



$$x_1(t) = x(t),\ x_2(t) = \dot{x}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

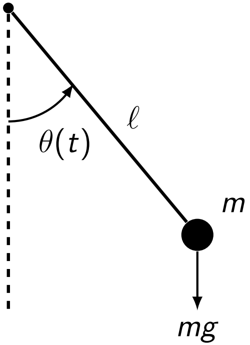
$$E_{\rm pot}(t) = \tfrac{1}{2}kx_1^2(t), \quad E_{\rm cin}(t) = \tfrac{1}{2}mx_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\rm tot}(t) = E_{\rm m}(t) + E_{\rm attr}(t) &= E_{\rm pot}(t) + E_{\rm cin}(t) + E_{\rm attr}(t) \\ &= \tfrac{1}{2}kx_1^2(t) + \tfrac{1}{2}mx_2^2(t) + E_{\rm attr}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\rm m}(t_2) \le E_{\rm m}(t_1), \quad \forall t_1, t_2,\ t_1 \le t_2}$$

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice

extra

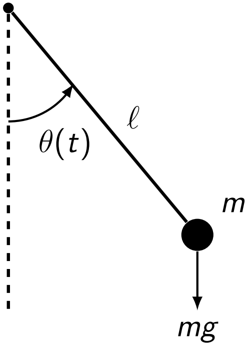


$$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot\theta(t)$$

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = -\frac{g}{\ell} \sin x_1(t) \end{cases}$$

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice

extra



$$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot{\theta}(t)$$

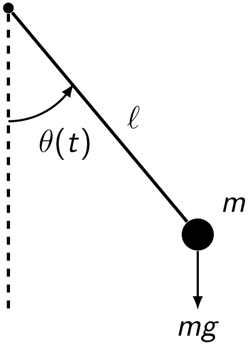
$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell} \sin x_1(t) \end{cases}$$

$$E_{\text{pot}}(t) = mg\ell(1 - \cos x_1(t)), \quad E_{\text{cin}}(t) = \frac{1}{2} m\ell^2 x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{m}}(t) &= E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) \\ &= mg\ell(1 - \cos x_1(t)) + \frac{1}{2} m\ell^2 x_2^2(t) \end{aligned}$$

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice

extra



$$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) \end{cases}$$

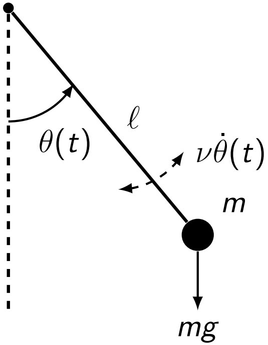
$$E_{\text{pot}}(t) = mg\ell(1 - \cos x_1(t)), \quad E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{m}}(t) &= E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) \\ &= mg\ell(1 - \cos x_1(t)) + \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\text{m}}(t) = E(x_1(t), x_2(t)) = \text{costante},\ \forall t}$$

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice con attrito

extra

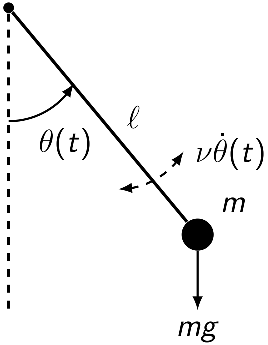


$$x_1(t) = \theta(t),\; x_2(t) = \dot\theta(t)$$

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice con attrito

extra



$$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot\theta(t)$$

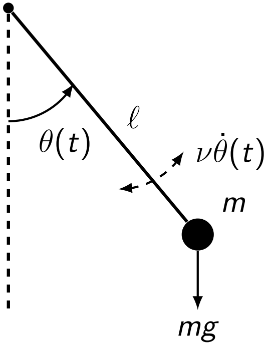
$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

$$E_{\text{pot}}(t) = mg\ell(1-\cos x_1(t)), \quad E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) &= E_{\text{m}}(t) + E_{\text{attr}}(t) = E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{attr}}(t) \\ &= mg\ell(1-\cos x_1(t)) + \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2(t) + E_{\text{attr}}(t) \end{aligned}$$

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice con attrito

extra



$$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

$$E_{\text{pot}}(t) = mg\ell(1-\cos x_1(t)), \quad E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) &= E_{\text{m}}(t) + E_{\text{attr}}(t) = E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{attr}}(t) \\ &= mg\ell(1-\cos x_1(t)) + \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2(t) + E_{\text{attr}}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\text{m}}(t_2) \le E_{\text{m}}(t_1), \quad \forall t_1, t_2,\ t_1 \le t_2}$$

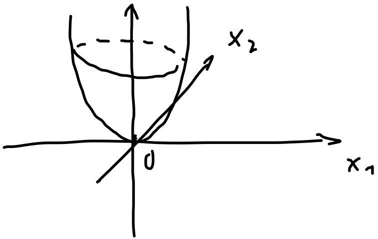
In questa lezione

- ▷ Teorema di linearizzazione
- ▷ Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Funzioni di Lyapunov
- ▷ Teorema di stabilità di Lyapunov

Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita positiva in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

$$V(x) > (\geq)\ 0, \ \forall x \in \mathcal{I},\ x \neq \bar{x}, \quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$



Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita positiva in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

$$V(x) > (\geq)\ 0,\ \forall x \in \mathcal{I},\ x \neq \bar{x}, \quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita negativa in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

$$V(x) < (\leq)\ 0,\ \forall x \in \mathcal{I},\ x \neq \bar{x}, \quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$

Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita positiva in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

$$V(x) > (\geq)\ 0, \ \forall x \in \mathcal{I},\ x \neq \bar{x}, \quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita negativa in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

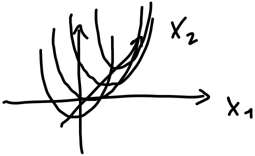
$$V(x) < (\leq)\ 0, \ \forall x \in \mathcal{I},\ x \neq \bar{x}, \quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice indefinita in un intorno $\bar{x}$ se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa in un intorno $\bar{x}$.

Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite: esempi

1. $\underline{V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2}$ def. pos. in $\bar{x} = 0$

2. $V(x_1, x_2) = x_1^2$



semidef. pos

3. $V(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2}$ neg. def.

4. $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$ indefinita

Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite: esempi

1. $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \quad \Longrightarrow \quad V$ definita positiva in un intorno di $\bar{x} = 0$

2. $V(x_1, x_2) = x_1^2 \quad \Longrightarrow \quad V$ semidefinita positiva in un intorno di $\bar{x} = 0$

3. $V(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2} \quad \Longrightarrow \quad V$ definita negativa in un intorno di $\bar{x} = 0$

4. $V(x_1, x_2) = x_1 x_2 \quad \Longrightarrow \quad V$ indefinita in un intorno di $\bar{x} = 0$

Funzioni di Lyapunov (t.c.)

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad \bar{x} \text{ punto di equilibrio}$$

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice funzione di Lyapunov del sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ rispetto al punto di equilibrio $\bar{x}$ se:

1. $V(x)$ è definita positiva in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$,
2. $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$.

Funzioni di Lyapunov (t.c.): esempi

extra

1. Oscillatore armonico smorzato ($\bar{x} = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} k x_1^2 + \tfrac{1}{2} m x_2^2$$

2. Pendolo semplice con attrito ($\bar{x} = 0$):

$$V(x_1, x_2) = mg\ell(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2} m\ell^2 x_2^2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell} \sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell} x_2(t) \end{cases}$$

Funzioni di Lyapunov (t.c.): esempi

extra

1. Oscillatore armonico smorzato ($\bar{x} = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} k x_1^2 + \tfrac{1}{2} m x_2^2 > 0, \ \forall x_1, x_2 \neq 0$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\nu x_2^2 \leq 0, \ \forall x_1, x_2$$

2. Pendolo semplice con attrito ($\bar{x} = 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell} \sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell} x_2(t) \end{cases}$$

$$V(x_1, x_2) = mg\ell(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2} m\ell^2 x_2^2 > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\nu\ell x_2^2 \leq 0, \ \forall x_1, x_2$$

Funzioni di Lyapunov (t.d.)

$$x(t+1) = f(x(t)), \qquad \bar{x} \text{ punto di equilibrio}$$

Definizione: Una funzione $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice funzione di Lyapunov del sistema $x(t+1) = f(x(t))$ rispetto al punto di equilibrio $\bar{x}$ se:

1. $V(x)$ è definita positiva in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$,
2. $\Delta V(x) = V(x(t+1)) - V(x(t))$ è semidefinita negativa in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$.

Funzioni di Lyapunov: osservazioni

1. Funzioni di Lyapunov = funzioni energia "generalizzate" !!!

Funzioni di Lyapunov: osservazioni

1. Funzioni di Lyapunov = funzioni energia "generalizzate" !!!

2. Non esiste un algoritmo generale per costruire funzioni di Lyapunov. Esse devono essere ricavate per tentativi, tipicamente partendo da considerazioni di tipo "energetico" (nel caso di sistemi fisici).

Funzioni di Lyapunov: osservazioni

1. Funzioni di Lyapunov = funzioni energia “generalizzate” !!!

2. Non esiste un algoritmo generale per costruire funzioni di Lyapunov. Esse devono essere ricavate per tentativi, tipicamente partendo da considerazioni di tipo “energetico” (nel caso di sistemi fisici).

3. Calcolo di $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \nabla V(x) f(x)$$

In questa lezione

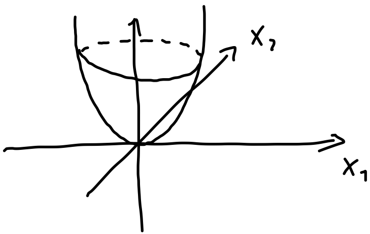
- Teorema di linearizzazione
- Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- Funzioni di Lyapunov
- Teorema di stabilità di Lyapunov

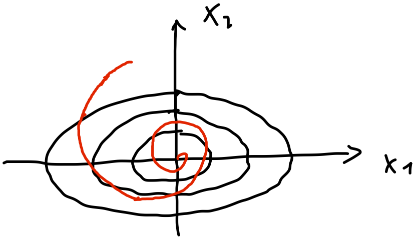
Teorema di stabilità di Lyapunov (t.c.)

Teorema: Dato un sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ con punto di equilibrio $\bar{x}$:

1. Se esiste una funzione di Lyapunov $V(x)$ del sistema rispetto all'equilibrio $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

2. Se inoltre si ha che $\dot{V}(x)$ è definita negativa allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile.





Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico ($m = k = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 0 \quad \longrightarrow \quad \bar{x} \text{ sempl. stabile}$$

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico ($m = k = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$\bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

extra

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\left((x_2 + x_1)^2 + x_2^2\right)$$

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

extra

2. Oscillatore armonico smorzato $(m = k = \nu = 1)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$, semidef. neg.

$\bar{x} = 0$ semplicemente stabile

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\left((x_2 + x_1)^2 + x_2^2\right)$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$, def. neg.

$\bar{x} = 0$ asintoticamente stabile !!

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$

$\bar{x} = 0$ sempl. stabile

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$\bar{x} = 0$ semplicemente stabile !

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

extra

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$V(x_1, x_2) = 2g(1-\cos x_1)+\frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$$

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

extra

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$, semidef. neg.

$\bar{x} = 0$ semplicemente stabile

$V(x_1, x_2) = 2g(1-\cos x_1)+\frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2 - g x_1 \sin x_1$, def. neg.

$\bar{x} = 0$ asintoticamente stabile !!

Teorema di stabilità di Lyapunov (t.d.)

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = f(x(t))$ con punto di equilibrio $\bar{x}$:

1. Se esiste una funzione di Lyapunov $V(x)$ del sistema rispetto all'equilibrio $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è semplicemente stabile.

2. Se inoltre si ha che $\Delta V(x(t))$ è definita negativa allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile.

$$V(x(t+1)) - V(x(t))$$

Teorema di Lyapunov (t.d.): esempi

extra

1. Dato il sistema

$a = -1$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ utilizzando $\underline{V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2}$.

Teorema di Lyapunov (t.d.): esempi

extra

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ utilizzando $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

$\Delta V(x_1, x_2) = -4x_1^4(1 - x_1^2) - 4x_2^4(1 - x_2^2)$, negativa definita attorno a $\bar{x}$

$\implies \bar{x} = 0$ asintoticamente stabile

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 10: Teorema di Linearizzazione e di Lyapunov

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2019-2020

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Teorema di linearizzazione (t.c.): esempi

extra

1. $\dot{x} = \sin x \qquad \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = \pi$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0$

back

1) $\dot{x} = \sin x$

$\bar{x} = 0 : \quad \dot{x} = x \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$ instabile

$\bar{x} = \pi : \quad \dot{z} = -z \quad \Rightarrow \quad \bar{x}$ asint. stabile

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1 (x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2 (x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = F \qquad \Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = (1-\lambda)^2 + 1$

$= \lambda^2 - 2\lambda + 2$

Regola di Cartesio $\longrightarrow$

$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] > 0$

$\bar{x}$ instabile

back

3) $\dot{x} = \alpha x^3$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = 0$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow$ CASO CRITICO

Teorema di linearizzazione (t.d.): esempi

extra

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a x_2(t) + (1-a) x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = -a x_1(t) + (a-1) x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.

back

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \overbrace{a x_2(t) + (1-a) x_2^3(t)}^{f_1} \\ x_2(t+1) = \underbrace{-a x_1(t) + (a-1) x_1^3(t)}_{f_2} \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Stabilità di $\bar{x}$, $a \in \mathbb{R}$?

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \pm i a$$

1) $|a| > 1$: $\bar{x}$ instabile

2) $|a| < 1$: $\bar{x}$ asint. stabile

3) $|a| = 1$, $a = \pm 1$: caso critico

back

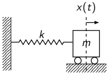
$a = 1$: $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = -x_1(t) \end{cases}$ $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\lambda_{1,2} = \pm i$

$\bar{x}$ sempl. stabile

$a = -1$?

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico

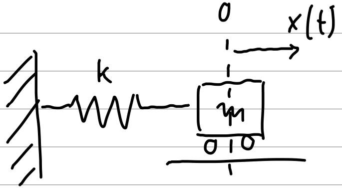
extra



$x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

back



$m\ddot{x} = -kx$

$x_1 = x, \quad x_2 = \dot{x}$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

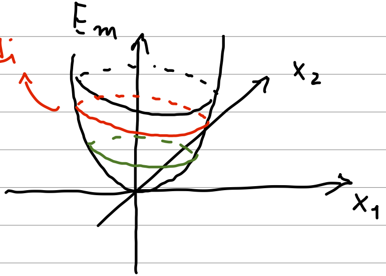
$F \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ sempl. stabile

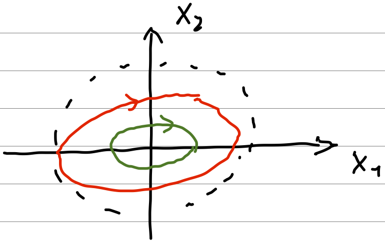
$$E_{tot} = E_m = E_{pot} + E_{cin}$$

$$= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$$

Principio di conservazione dell'energia: $E_{tot} = E_m(t) = \text{cost.} \quad \forall t$

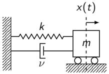
curve di livello





Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico smorzato

extra



$x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$m\ddot{x} = -kx - \nu\dot{x}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix}}_{F} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = -\lambda\left(-\lambda - \frac{\nu}{m}\right) + \frac{k}{m} = \lambda^2 + \frac{\nu}{m}\lambda + \frac{k}{m}$$

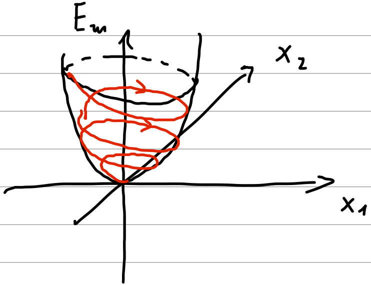
$$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] < 0$$

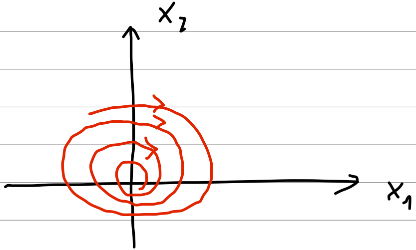
asint. stabile

$\downarrow$ $\uparrow$

$$E_{tot} = E_m + E_{attr} = \text{cost.}$$

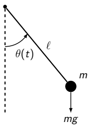
$$E_m(t_2) \leq E_m(t_1) \qquad t_2 \geq t_1$$


E_m
x_2
x_1


x_2
x_1

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice

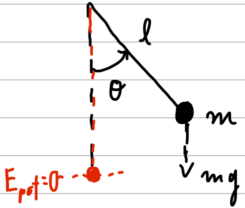
extra



$x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot\theta(t)$

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) \end{cases}$$

back



$$m\ell\ddot\theta = -mg\sin\theta$$

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot\theta$$

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 \end{cases} \qquad \bar x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

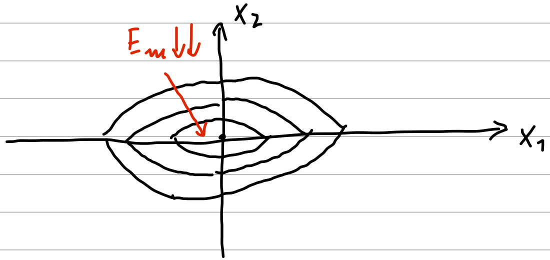
$$J_f(\bar x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

caso critico!

$$E_{tot} = E_m = E_{pot} + E_{cin} = mg\ell(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2$$

$$= mg\ell(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}m\ell^2 x_2^2$$

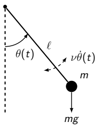
$$E_m(t) = \text{cost.} \quad \forall t$$



$\bar{x}$ sempl. stabile

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice con attrito

extra



$x_1(t) = \theta(t)$, $x_2(t) = \dot\theta(t)$

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

back

$$m\ell\ddot\theta = -mg\sin\theta - \nu\dot\theta$$

$$\begin{cases} \dot x_1 = x_2 \\ \dot x_2 = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\nu}{m\ell}x_2 \end{cases} \qquad \bar x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$J_f(\bar x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & -\frac{\nu}{m\ell} \end{bmatrix} = F$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(F - \lambda I) = -\lambda\left(-\lambda - \frac{\nu}{m\ell}\right) + \frac{g}{\ell} = \lambda^2 + \frac{\nu}{m\ell}\lambda + \frac{g}{\ell}$$

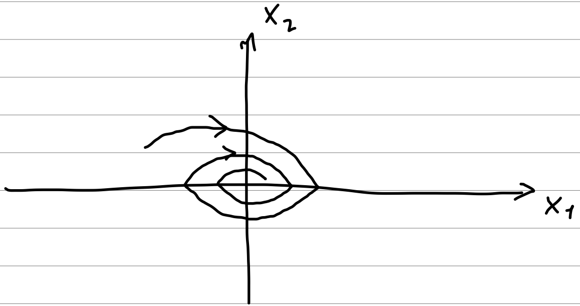
$$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] < 0$$

$\bar x$ asint. stabile

$$E_{tot} = E_m + E_{attr}$$

back

$$E_m(t_2) \leq E_m(t_1) \qquad t_2 \geq t_1$$



Funzioni di Lyapunov (t.c.): esempi

extra

1. Oscillatore armonico smorzato ($\bar{x} = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}kx_1^2 + \tfrac{1}{2}mx_2^2$$

2. Pendolo semplice con attrito ($\bar{x} = 0$):

$$V(x_1, x_2) = mg\ell(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

back

1) oscillatore armonico $\bar{x} = 0$

$V(x_1, x_2) = E_m = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} m x_2^2$ def. pos.

$$\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{1}{2} K (2 x_1) \dot{x}_1 + \frac{1}{2} m (2 x_2) \dot{x}_2$$

$$= K x_1 x_2 + m x_2 \left(-\frac{k}{m} x_1 - \frac{\nu}{m} x_2 \right)$$

$$= \cancel{K x_1 x_2} - \cancel{K x_1 x_2} - \nu x_2^2 = -\nu x_2^2$$ semi def neg.

2) $V(x_1, x_2) = E_m = mg\ell(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} m \ell^2 x_2^2$ def. pos. in un intorno di $\bar{x} = 0$

$$\dot V(x_1, x_2) = mgl(\sin x_1)\,\dot x_1 + \cancel{\tfrac{1}{2}}\, ml^2 (\cancel{2}\, x_2\, \dot x_2)$$

$$= mgl(\sin x_1)\, x_2 + ml^{\cancel{2}} x_2 \left(-\frac{g}{\cancel{l}} \sin x_1 - \frac{\nu}{m\cancel{l}}\, x_2\right)$$

$$= \cancel{mgl\, x_2 \sin x_1} - \cancel{mlg\, x_2 \sin x_1} - \nu l\, x_2^2$$

$$= -\nu l\, x_2^2 \quad \text{semidef. neg.}$$

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

extra

back

2. Oscillatore armonico smorzato $(m = k = \nu = 1)$:

$$\begin{bmatrix}\dot x_1(t)\\ \dot x_2(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}, \qquad \bar x = 0$$

$V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$V(x_1,x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\left((x_2+x_1)^2 + x_2^2\right)$

1) $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot V(x_1,x_2) = -x_2^2$ semidef. neg

$\bar x = 0$ sempl. stabile

2) $V(x_1,x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\left((x_2+x_1)^2 + x_2^2\right)$ def. pos. in un intorno di $\bar x = 0$

$$\dot V(x_1,x_2) = 2x_1\dot x_1 + \frac{1}{2}\left(2(x_2+x_1)(\dot x_2+\dot x_1) + 2x_2\dot x_2\right)$$

$$= 2x_1x_2 + (x_2+x_1)(-\cancel{x_2} - x_1 + \cancel{x_2}) + x_2(-x_2-x_1)$$

$$= 2\cancel{x_1x_2} - \cancel{x_1x_2} - x_1^2 - x_2^2 - \cancel{x_1x_2}$$

$= -x_1^2 - x_2^2$ def. neg. in un intorno di $\bar{x} = 0$

$\bar{x} = 0$ asint. stabile!

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

extra

back

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar x = 0$$

$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$

$V(x_1, x_2) = 2g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$

1) $V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$

$\dot V(x_1, x_2) = -\nu \ell x_2^2$ semidefinita neg.

$\bar x = 0$ sempl. stabile

2) $V(x_1, x_2) = 2g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$ def. pos. in un intorno di $\bar x = 0$

$$\dot V(x_1, x_2) = 2g(\sin x_1)\dot x_1 + \frac{1}{2}\left(2(x_1 + x_2)(\dot x_1 + \dot x_2) + 2 x_2 \dot x_2\right)$$

$$= 2g(\sin x_1) x_2 + (x_1 + x_2)(\cancel{x_2} - g \sin x_1 - \cancel{x_2}) + x_2(-g \sin x_1 - x_2)$$

$$= 2g\cancel{x_2} \sin x_1 - g x_1 \sin x_1 - g \cancel{x_2} \sin x_1 - g \cancel{x_2} \sin x_1 - x_2^2$$

back

$= -g\, x_1 \sin x_1 - x_2^2$ def. neg. in un intorno di $\bar{x} = 0$

$\bar{x} = 0$ asint. stabile

Teorema di Lyapunov (t.d.): esempi

extra

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ utilizzando $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

back

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

V è funzione di Lyapunov?

1) $V(x_1, x_2)$ è def. pos. in un intorno di $\bar{x}$

2) $\Delta V(x_1, x_2) = V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t))$

$$= x_1(t+1)^2 + x_2(t+1)^2 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2$$

$$= (-x_2 + 2x_2^3)^2 + (x_1 - 2x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2$$

$$= \cancel{x_2^2} - 4x_2^4 + 4x_2^6 + \cancel{x_1^2} - 4x_1^4 + 4x_1^6 - \cancel{x_1^2} - \cancel{x_2^2}$$

$$= -4\underbrace{x_2^4}_{>0}\underbrace{(1-x_2^2)}_{>0} - 4\underbrace{x_1^4}_{>0}\underbrace{(1-x_1^2)}_{>0}$$ def. neg. in un intorno di $\bar{x}$

$\bar{x}$ è asint. stabile