Teorema di linearizzazione (t.c.): esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad \bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\dot{x} = \alpha x^3$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = 0$

1) $\dot{x} = \sin x$

$\bar{x} = 0$: $\dot{x} = x$ $\quad F = 1 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile

$\bar{x} = \pi$: $\dot{z} = -z$ $\quad F = -1 \Rightarrow \bar{x}$ è asint. stabile

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = f_2(x_1, x_2) \end{cases}$ $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$F = J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1 x_2 \\ 1 - 2x_1 x_2 & 1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i$$

$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] > 0 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile

3) $\dot{x} = \alpha x^3$ $\quad \alpha \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = 0$

$F = 0 \Rightarrow$ caso critico!

Teorema di linearizzazione (t.d.): esempi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = ax_2(t) + (1-a)x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = -ax_1(t) + (a-1)x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.

note

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a\,x_2(t) + (1-a)\,x_2^3(t) = f_1(x_1,x_2) \\ x_2(t+1) = -a\,x_1(t) + (a-1)\,x_1^3(t) = f_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ punto di equilibrio

$$F = J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & a+3(1-a)x_2^2 \\ -a+3(a-1)x_1^2 & 0 \end{bmatrix}_{x=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + a^2 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i a$$

$$|\lambda_{1,2}| = |a|$$

1) $|a| > 1 \Rightarrow |\lambda_{1,2}| > 1 \Rightarrow \bar{x}$ instabile

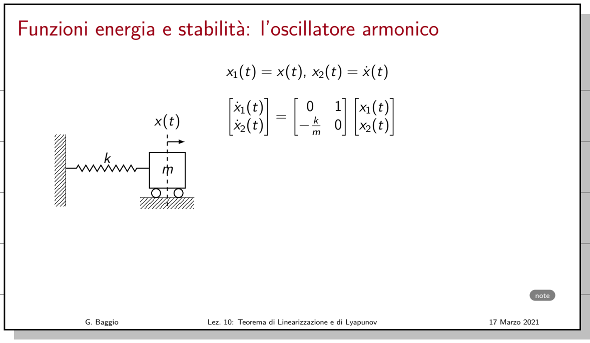
2) $|a| < 1 \Rightarrow |\lambda_{1,2}| < 1 \Rightarrow \bar{x}$ asint. stabile

3) $|a| = 1$ $(a = \pm 1) \Rightarrow |\lambda_{1,2}| = 1 \Rightarrow$ caso critico!

$\underline{a = 1}$: $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = -x_1(t) \end{cases}$ $\quad x(t+1) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}^{F} x(t)$

$\lambda_{1,2} = \pm i \Rightarrow \bar{x}$ è semplicemente stabile

$\underline{a = -1}$: ?



$$x_1(t) = p(t), \quad x_2(t) = \dot{p}(t)$$

$$m\ddot{p} = -Kp \quad \text{(legge di Newton)}$$

Rappresentazione in spazio di stato:

$$\dot{x}_1 = \dot{p} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{p} = -\frac{K}{m} p = -\frac{K}{m} x_1 \; : \; \dot{x}(t) = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & 0 \end{bmatrix}}^{F} x(t) \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ K/m & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{K}{m}$$

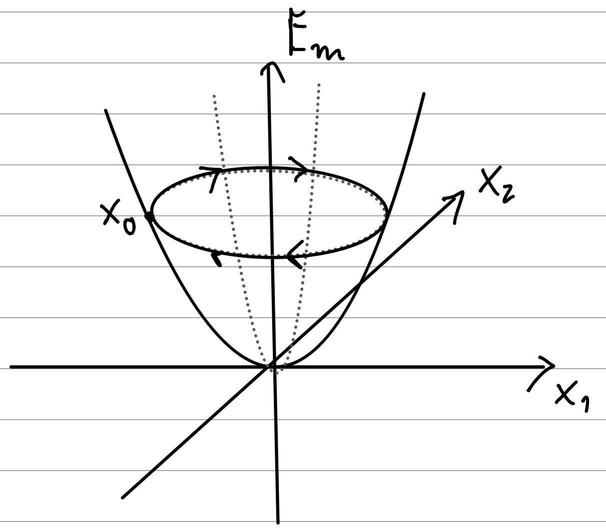
$$\longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \bar{x} \text{ è sempl. stabile}$$

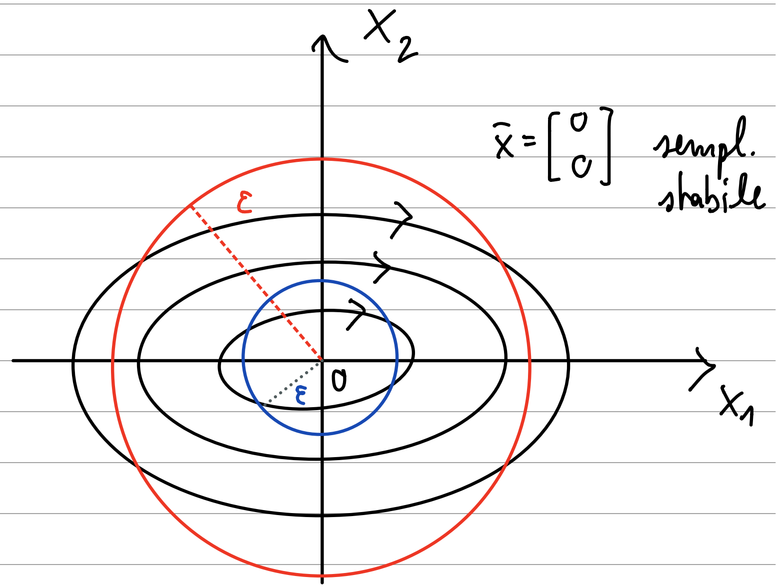
Energia del sistema:

$$E_{tot} = E_m = E_{pot} + E_{cin} = \frac{1}{2} K p^2 + \frac{1}{2} m \dot{p}^2 = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} m x_2^2$$

$$E_{tot}(t) = E_m(t) = \text{cost} \quad \forall t \geq 0 \quad \text{(principio di conservazione dell'energia)}$$

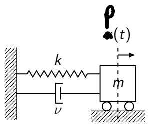
$$\dot{E}_m(x_1(t), x_2(t)) = 0$$





Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico smorzato

$x_1(t) = p(t)$, $x_2(t) = \dot{p}(t)$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

note

$$x_1(t) = p(t), \quad x_2(t) = \dot{p}(t)$$

$$m\ddot{p} = -kp - \nu\dot{p}$$

Rappresentazione in spazio di stato:

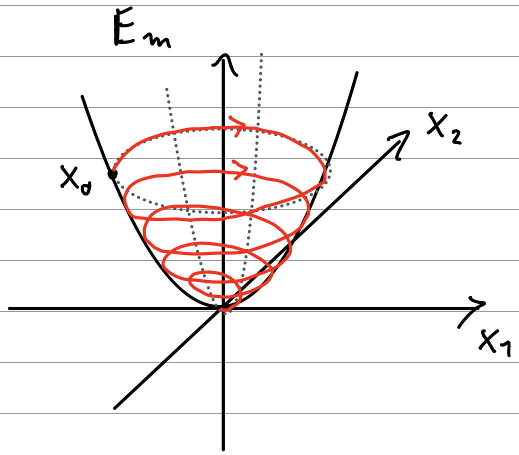
$$\dot{x}_1 = \dot{p} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{p} = -\frac{k}{m}p - \frac{\nu}{m}\dot{p} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\nu}{m}x_2$$

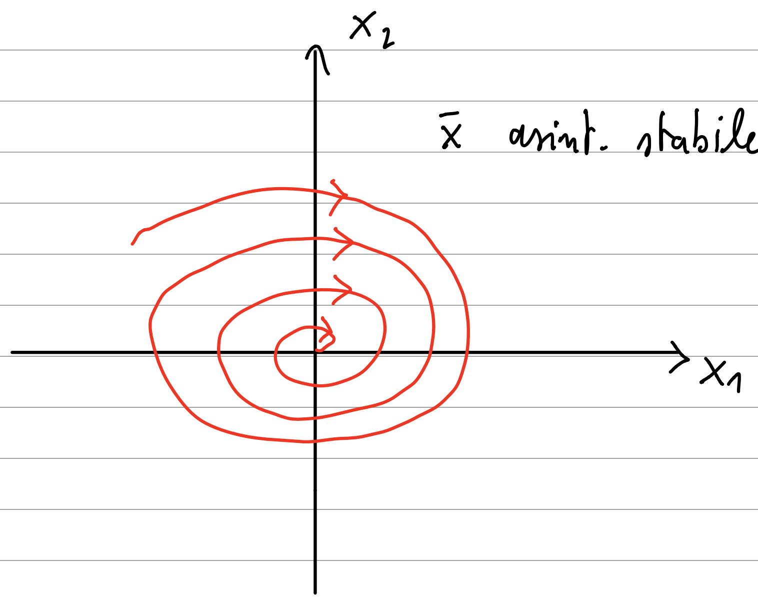
$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix}}_{F} x(t), \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ equilibrio (asint. stabile)}$$

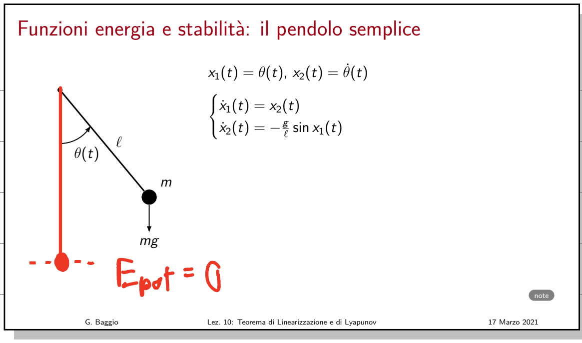
Energia del sistema:

$$E_{tot} = E_m + E_{attr}, \qquad E_m = E_{pot} + E_{cin} = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$$

$$t_2 \geq t_1: \quad \begin{aligned} E_m(t_2) &\leq E_m(t_1) \\ E_{attr}(t_2) &\geq E_{attr}(t_1) \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \dot{E}_m(x_1(t), x_2(t)) \leq 0$$







$$x_1(t) = \theta(t) \qquad x_2(t) = \dot\theta(t)$$

$$m\ell\ddot\theta = -mg\sin\theta \qquad \text{(legge di Newton)}$$

Rappresentazione in spazio di stato:

$$\begin{cases} \dot x_1 = \dot\theta = x_2 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot x_2 = \ddot\theta = -\frac{g}{\ell}\sin\theta = \underbrace{-\frac{g}{\ell}\sin x_1}_{f_2(x_1,x_2)} \end{cases}$$

equilibri: $\bar x = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boxed{\bar x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

Stabilità di $\bar x$ tramite linearizzazione:

$$F = J_f(\bar x) = \left.\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell}\cos x_1 & 0 \end{bmatrix}\right|_{x=\bar x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{caso critico!}$$

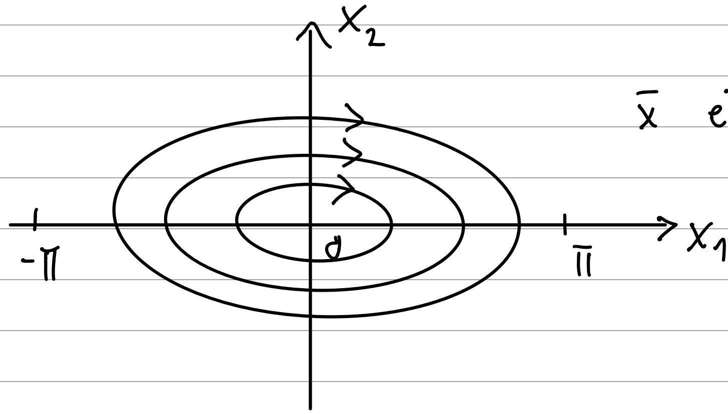
Funzione energia:

$$E_{tot} = E_m = E_{pot} + E_{cin} = mg\ell(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2$$

$$= mg\ell(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}m\ell^2 x_2^2$$

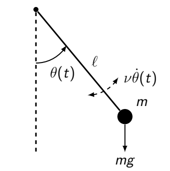
$E_{tot}(t) = E_m(t) = \text{cost} \quad \forall t \geq 0$ (conservazione dell'energia)

$\dot E_m(t) = 0$



$\bar x$ é sempl. stabile

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice con attrito



$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot\theta(t)$

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

note

G. Baggio — Lez. 10: Teorema di Linearizzazione e di Lyapunov — 17 Marzo 2021

$x_1 = \theta \;,\; x_2 = \dot\theta$

$m\ell\ddot\theta = -mg\sin\theta - \nu\dot\theta$

Rappresentazione in spazio di stato:

$$\begin{cases} \dot x_1 = \dot\theta = x_2 \\ \dot x_2 = \ddot\theta = -\frac{g}{\ell}\sin\theta - \frac{\nu}{m\ell}\dot\theta = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\nu}{m\ell}x_2 \end{cases}$$

$\bar x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ punto di eq.

Energia del sistema:

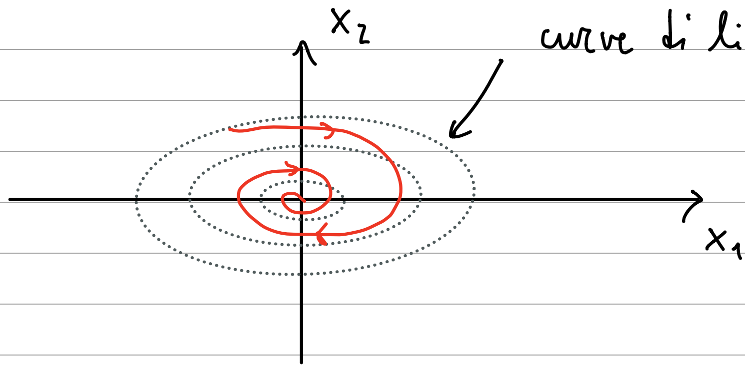
$E_{tot} = E_m + E_{attr}$

$E_m = E_{pot} + E_{cin} = mg\ell(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}m\ell^2x_2^2$

$t_2 \geq t_1: \quad E_m(t_2) \leq E_m(t_1) \qquad \dot E_m(x_1(t), x_2(t)) \leq 0$

$\qquad\quad E_{attr}(t_2) \geq E_{attr}(t_1)$

curve di livello ($E_m = \text{cost}$)



$\bar x$ è asint. stabile

Funzioni di Lyapunov (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico smorzato ($\bar{x} = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}kx_1^2 + \tfrac{1}{2}mx_2^2$$

2. Pendolo semplice con attrito ($\bar{x} = 0$):

$$V(x_1, x_2) = mg\ell(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

note

1) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$

- $V(x_1, x_2)$ def. pos.? sì
- $\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{1}{2}k(2x_1)\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m(2x_2)\dot{x}_2$

$$= kx_1x_2 + mx_2\left(-\frac{k}{m}x_1 - \frac{\nu}{m}x_2\right)$$

$$= \cancel{kx_1}x_2 - \cancel{kx_1}x_2 - \nu x_2^2 = -\nu x_2^2 \quad \text{semidef. negativa}$$

$\Rightarrow$ V è funzione di Lyapunov rispetto a $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\nu}{m\ell}x_2 \end{cases} \quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad V(x_1, x_2) = mg\ell(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}m\ell^2 x_2^2$

- $V(x_1, x_2)$ def. pos.? sì, V def. pos. in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$
- $\dot{V}(x_1, x_2) = mg\ell(\sin x_1)\dot{x}_1 + \frac{1}{\cancel{2}}m\ell^2(\cancel{2}x_2)\dot{x}_2$

$$= mg\ell(\sin x_1)x_2 + m\ell^2x_2\left(-\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\nu}{m\ell}x_2\right)$$

$$= \cancel{mg\ell(\sin x_1)}x_2 - \cancel{mg\ell(\sin x_1)}x_2 - \nu\ell x_2^2 = -\nu\ell x_2^2 \text{ è semidef. neg.}$$

$\Rightarrow$ V è funzione di Lyapunov rispetto a $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\left((x_2 + x_1)^2 + x_2^2\right)$

note

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$ è funzione di Lyapunov

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$ semidef. neg.

$\bar{x}$ è sempl. stabile per Lyapunov

2) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\left((x_2 + x_1)^2 + x_2^2\right)$

$V(x_1, x_2)$ è def. pos.

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}(x_2 + x_1)(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\, x_2 \dot{x}_2$$

$$= 2x_1x_2 + (x_2 + x_1)(\cancel{x_2} - x_1 - \cancel{x_2}) + x_2(-x_1 - x_2)$$

$$= 2\cancel{x_1x_2} - \cancel{x_1x_2} - x_1^2 - \cancel{x_1x_2} - x_2^2 = -x_1^2 - x_2^2$$

$$= -(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{def. neg.}$$

$\Rightarrow \bar{x}$ è asint. stabile

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g\sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = g(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ | $V(x_1, x_2) = 2g(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}\left((x_1+x_2)^2 + x_2^2\right)$

note

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g\sin x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) $V(x_1, x_2) = g(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ è funzione di Lyapunov

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$ semidef. neg.

$\bar{x}$ è sempl. stabile per il teorema di Lyapunov

2) $V(x_1, x_2) = 2g(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}\left((x_1+x_2)^2 + x_2^2\right)$

- $V(x_1, x_2)$ è def. pos. in un intorno di $\bar{x}$? sì
- $\dot{V}(x_1, x_2) = 2g(\sin x_1)\dot{x}_1 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}(x_1+x_2)(\dot{x}_1+\dot{x}_2) + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x_2\dot{x}_2$

$$= 2g(\sin x_1)x_2 + (x_1+x_2)(\cancel{x_2} - g\sin x_1 - \cancel{x_2}) + x_2(-g\sin x_1 - x_2)$$

$$= \cancel{2g(\sin x_1)x_2} - g(\sin x_1)x_1 - \cancel{g(\sin x_1)x_2} - \cancel{g(\sin x_1)x_2} - x_2^2$$

$$= -g(\sin x_1)x_1 - x_2^2 = -\Big(g\underbrace{(\sin x_1)x_1}_{>0 \text{ in un intorno di } \bar{x}} + x_2^2\Big)$$

def. negativa in un intorno di $\bar{x}$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ è asintoticamente stabile per il teorema di Lyapunov

Teorema di Lyapunov (t.d.): esempi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ utilizzando $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

$a = -1$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

- V è def. pos.? sì
- $$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t)) \\ &= x_1(t+1)^2 + x_2(t+1)^2 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2 \\ &= (-x_2 + 2x_2^3)^2 + (x_1 - 2x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= \cancel{x_2^2} + 4x_2^6 - 4x_2^4 + \cancel{x_1^2} + 4x_1^6 - 4x_1^4 - \cancel{x_1^2} - \cancel{x_2^2} \\ &= -4\underbrace{x_2^4(1 - x_2^2)}_{>0} - 4\underbrace{x_1^4(1 - x_1^2)}_{>0} \quad \text{def. negativa} \end{aligned}$$

in un intorno di $\bar{x}$

Per il teorema di Lyapunov, $\bar{x}$ è asint. stabile