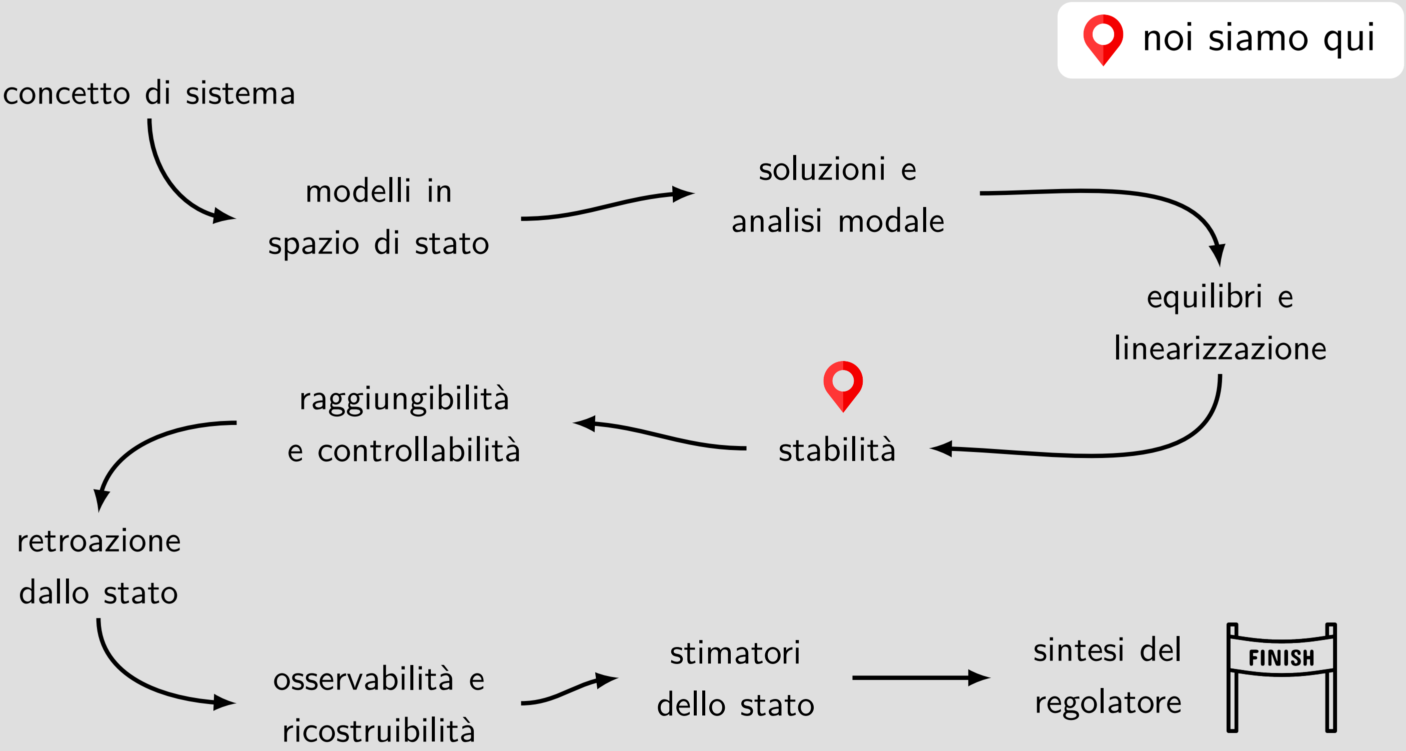
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)
Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 10: Teorema di Linearizzazione e di Lyapunov

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021


noi siamo qui
concetto di sistema
modelli in spazio di stato
soluzioni e analisi modale
equilibri e linearizzazione
stabilità
raggiungibilità e controllabilità
retroazione dallo stato
osservabilità e ricostruibilità
stimatori dello stato
sintesi del regolatore
FINISH

Nella scorsa lezione

$\dot{x}(t) = f(x(t))$ t.c.

$x(t+1) = f(x(t))$ t.d.

- Traiettorie di stato di un sistema $\{x(t), t \geq 0\}$
- Punti di equilibrio di un sistema (con e senza ingressi) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$: $f(\bar{x}) = 0$ t.c
  $\bar{x} = f(\bar{x})$ t.d.
- Stabilità semplice e asintotica di un equilibrio
- Linearizzazione di sistemi non lineari

In questa lezione

- Teorema di linearizzazione
- Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- Funzioni di Lyapunov
- Teorema di stabilità di Lyapunov

Teorema di linearizzazione (t.c.)

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

Teorema di linearizzazione (t.c.)

Un punto di eq. $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ è instabile se non è semplicemente stabile.

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

$J_f(\bar{x})$

Teorema: Sia $\dot{z}(t) = Fz(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($\Re[\lambda_i] < 0, \forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) instabile per il sistema non lineare.

Teorema di linearizzazione (t.c.)

$\dot{x}(t) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

Teorema: Sia $\dot{z}(t) = Fz(t)$ il sistema linearizzato di $\dot{x}(t) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($\Re[\lambda_i] < 0, \ \forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con parte reale positiva ($\exists i$ tale che $\Re[\lambda_i] > 0$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) instabile per il sistema non lineare.

$$\boxed{\text{Caso critico: } \Re[\lambda_i] \leq 0, \ \forall i, \text{ e } \exists\, i\text{: } \Re[\lambda_i] = 0}$$

Teorema di linearizzazione (t.c.): esempi

1. $\dot{x} = \sin x \qquad \begin{aligned} \bar{x} &= 0 \\ \bar{x} &= \pi \end{aligned}$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\dot{x} = \alpha x^3, \qquad \alpha \in \mathbb{R},\ \bar{x} = 0$

note

Teorema di linearizzazione (t.c.): esempi

1. $\dot{x} = \sin x$ $\quad$ $\bar{x} = 0$, $\bar{x} = \pi$ $\quad \Longrightarrow \quad$ $\bar{x} = 0$ instabile, $\bar{x} = \pi$ stabile

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$ $\quad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad$ $\bar{x}$ instabile

3. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0 \quad \Longrightarrow$ caso critico

note

Teorema di linearizzazione (t.d.)

$x(t+1) = f(x(t))$: sistema non lineare con punto di equilibrio $\bar{x}$

$\to J_f(\bar{x})$

Teorema: Sia $z(t+1) = Fz(t)$ il sistema linearizzato di $x(t+1) = f(x(t))$ attorno a $\bar{x}$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori di F. Allora:

1. Se il sistema linearizzato è asintoticamente stabile ($|\lambda_i| < 1$, $\forall i$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) asintoticamente stabile per il sistema non lineare.
2. Se il sistema linearizzato ha un autovalore con modulo maggiore di uno ($\exists i$ tale che $|\lambda_i| > 1$), allora $\bar{x}$ è un punto di equilibrio (localmente) instabile per il sistema non lineare.

$$\boxed{\text{Caso critico: } |\lambda_i| \leq 1,\ \forall i, \text{ e } \exists\, i\text{: } |\lambda_i| = 1}$$

Teorema di linearizzazione (t.d.): esempi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = ax_2(t) + (1-a)x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = -ax_1(t) + (a-1)x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.

note

Teorema di linearizzazione (t.d.): esempi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = ax_2(t) + (1-a)x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = -ax_1(t) + (a-1)x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.

$\bar{x} = 0$ asintoticamente stabile per $|a| < 1$

$\bar{x} = 0$ instabile per $|a| > 1$

$a = \pm 1$: caso critico !

note

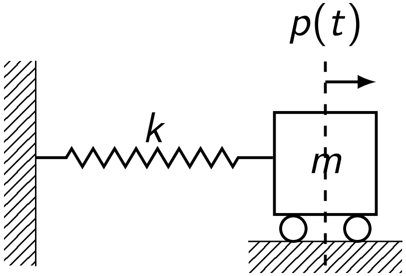
In questa lezione

- ▷ Teorema di linearizzazione
- ▷ Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Funzioni di Lyapunov
- ▷ Teorema di stabilità di Lyapunov

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico

$$x_1(t) = p(t),\; x_2(t) = \dot{p}(t)$$

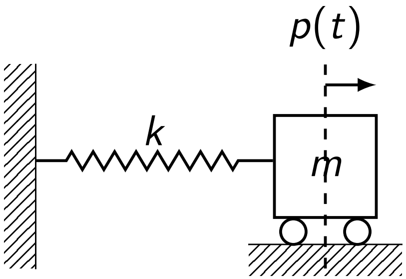
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



$p = 0$
molla a riposo

note

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico



$$x_1(t) = p(t),\ x_2(t) = \dot{p}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

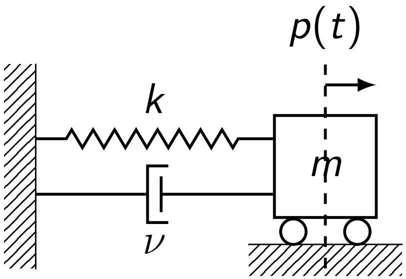
$$E_{\text{pot}}(t) = \tfrac{1}{2} k x_1^2(t), \quad E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2} m x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{m}}(t) &= E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) \\ &= \tfrac{1}{2} k x_1^2(t) + \tfrac{1}{2} m x_2^2(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\text{m}}(t) = E(x_1(t), x_2(t)) = \text{costante},\ \forall t}$$

note

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico smorzato

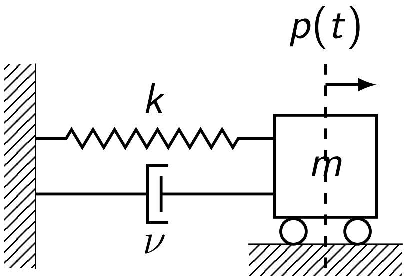


$$x_1(t) = p(t),\ x_2(t) = \dot{p}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

note

Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico smorzato



$$x_1(t) = p(t),\ x_2(t) = \dot{p}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

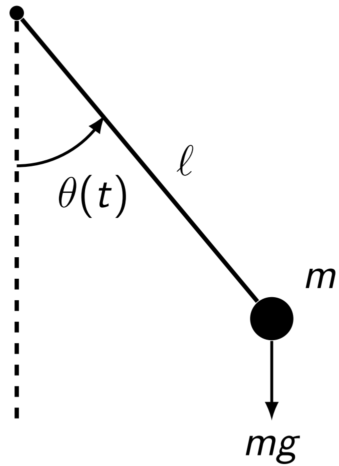
$$E_{\text{pot}}(t) = \tfrac{1}{2} k x_1^2(t), \quad E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2} m x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) &= E_{\text{m}}(t) + E_{\text{attr}}(t) = E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{attr}}(t) \\ &= \tfrac{1}{2} k x_1^2(t) + \tfrac{1}{2} m x_2^2(t) + E_{\text{attr}}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\text{m}}(t_2) \leq E_{\text{m}}(t_1), \quad \forall t_1, t_2,\ t_1 \leq t_2}$$

note

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice

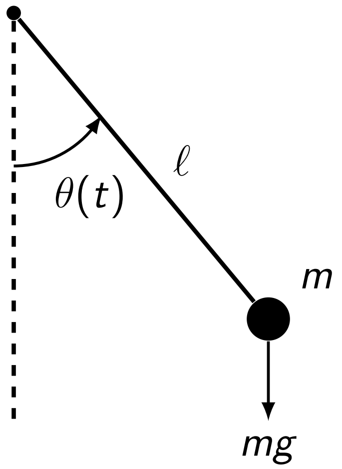


$$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) \end{cases}$$

note

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice



$$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell} \sin x_1(t) \end{cases}$$

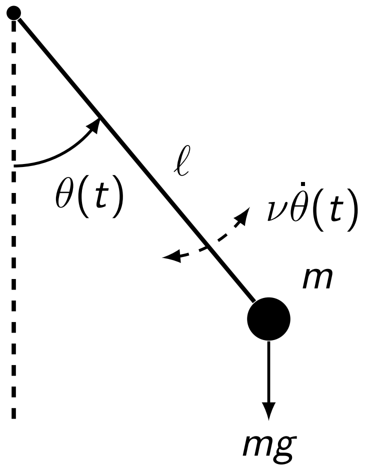
$$E_{\text{pot}}(t) = mg\ell(1 - \cos x_1(t)), \quad E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2} m\ell^2 x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{m}}(t) &= E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) \\ &= mg\ell(1 - \cos x_1(t)) + \tfrac{1}{2} m\ell^2 x_2^2(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\text{m}}(t) = E(x_1(t), x_2(t)) = \text{costante},\ \forall t}$$

note

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice con attrito

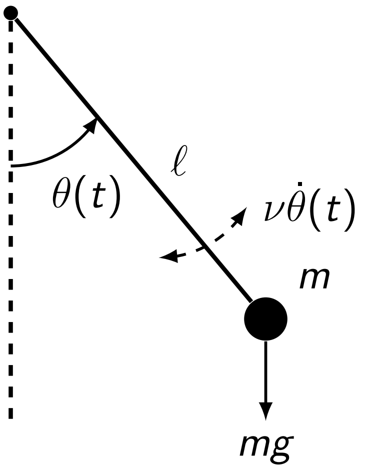


$$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot{\theta}(t)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

note

Funzioni energia e stabilità: il pendolo semplice con attrito



$$x_1(t) = \theta(t),\ x_2(t) = \dot\theta(t)$$

$$\begin{cases} \dot x_1(t) = x_2(t) \\ \dot x_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

$$E_{\text{pot}}(t) = mg\ell(1-\cos x_1(t)), \quad E_{\text{cin}}(t) = \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2(t)$$

$$\begin{aligned} E_{\text{tot}}(t) &= E_{\text{m}}(t) + E_{\text{attr}}(t) = E_{\text{pot}}(t) + E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{attr}}(t) \\ &= mg\ell(1-\cos x_1(t)) + \tfrac{1}{2}m\ell^2 x_2^2(t) + E_{\text{attr}}(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{E_{\text{m}}(t_2) \le E_{\text{m}}(t_1), \quad \forall t_1, t_2,\ t_1 \le t_2}$$

note

In questa lezione

- ▷ Teorema di linearizzazione
- ▷ Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Funzioni di Lyapunov
- ▷ Teorema di stabilità di Lyapunov

Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita positiva in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

$$V(x) > (\geq)\ 0, \ \forall x \in \mathcal{I}, \ x \neq \bar{x}, \quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$

Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita positiva in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

$$V(x) > (\geq)\ 0,\ \forall x \in \mathcal{I},\ x \neq \bar{x}, \quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita negativa in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

$$V(x) < (\leq)\ 0,\ \forall x \in \mathcal{I},\ x \neq \bar{x}, \quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$

Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita positiva in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

$$V(x) > (\geq)\ 0,\ \forall x \in \mathcal{I},\ x \neq \bar{x},\quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice (semi)definita negativa in un intorno di $\bar{x}$ se esiste un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ tale che:

$$V(x) < (\leq)\ 0,\ \forall x \in \mathcal{I},\ x \neq \bar{x},\quad \text{e } V(\bar{x}) = 0.$$

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice indefinita in un intorno di $\bar{x}$ se non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa in un intorno di $\bar{x}$.

Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite: esempi

$\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

1. $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \longrightarrow$ def. positiva in un intorno $\mathcal{I} = \mathbb{R}^2$ di $\bar{x}$

2. $V(x_1, x_2) = x_1^2 \longrightarrow$ semidef. positiva in un intorno $\mathcal{I} = \mathbb{R}^2$ di $\bar{x}$

3. $V(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2} \longrightarrow$ def. negativa " " " " " "

4. $V(x_1, x_2) = x_1 x_2 \longrightarrow$ indefinita

Funzioni (semi)definite positive, negative, indefinite: esempi

1. $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ $\implies$ V definita positiva in un intorno di $\bar{x} = 0$

2. $V(x_1, x_2) = x_1^2$ $\implies$ V semidefinita positiva in un intorno di $\bar{x} = 0$

3. $V(x_1, x_2) = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{1 + x_1^2}$ $\implies$ V definita negativa in un intorno di $\bar{x} = 0$

4. $V(x_1, x_2) = x_1 x_2$ $\implies$ V indefinita in un intorno di $\bar{x} = 0$

Funzioni di Lyapunov (t.c.)

$$\dot{x}(t) = \overset{\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n}{f}(x(t)), \qquad \bar{x} \text{ punto di equilibrio}$$

Definizione: Una funzione $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice funzione di Lyapunov del sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ rispetto al punto di equilibrio $\bar{x}$ se:

1. $V(x)$ è definita positiva in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$,
2. $\dot{V}(x)$ è semidefinita negativa in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$.

Funzioni di Lyapunov (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico smorzato ($\bar{x} = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} k x_1^2 + \tfrac{1}{2} m x_2^2$$

2. Pendolo semplice con attrito ($\bar{x} = 0$):

$$V(x_1, x_2) = mg\ell(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2} m\ell^2 x_2^2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell} \sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell} x_2(t) \end{cases}$$

note

Funzioni di Lyapunov (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico smorzato ($\bar{x} = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2} k x_1^2 + \tfrac{1}{2} m x_2^2 > 0, \ \forall x_1, x_2 \neq 0$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\nu x_2^2 \leq 0, \ \forall x_1, x_2$$

2. Pendolo semplice con attrito ($\bar{x} = 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell} \sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell} x_2(t) \end{cases}$$

$$V(x_1, x_2) = mg\ell(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2} m\ell^2 x_2^2 > 0, \quad \forall x_1, x_2 \in [-\varepsilon, \varepsilon] \setminus \{0\}$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -\nu \ell x_2^2 \leq 0, \ \forall x_1, x_2$$

note

Funzioni di Lyapunov (t.d.)

$$x(t+1) = f(x(t)), \quad \bar{x} \text{ punto di equilibrio}$$

Definizione: Una funzione $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice funzione di Lyapunov del sistema $x(t+1) = f(x(t))$ rispetto al punto di equilibrio $\bar{x}$ se:

1. $V(x)$ è definita positiva in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$,
2. $\Delta V(x) = V(x(t+1)) - V(x(t))$ è semidefinita negativa in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$.

Funzioni di Lyapunov: osservazioni

1. Funzioni di Lyapunov = funzioni energia "generalizzate" !!!

Funzioni di Lyapunov: osservazioni

1. Funzioni di Lyapunov = funzioni energia “generalizzate” !!!

2. Non esiste un algoritmo generale per costruire funzioni di Lyapunov. Queste si ricavano tipicamente per tentativi, partendo da considerazioni di tipo “energetico” (nel caso di sistemi fisici).

Funzioni di Lyapunov: osservazioni

1. Funzioni di Lyapunov = funzioni energia "generalizzate" !!!

2. Non esiste un algoritmo generale per costruire funzioni di Lyapunov. Queste si ricavano tipicamente per tentativi, partendo da considerazioni di tipo "energetico" (nel caso di sistemi fisici).

3. Calcolo di $\dot{V}(x)$:

$$\dot{V}(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial V(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial V(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix} = \nabla V(x) f(x)$$

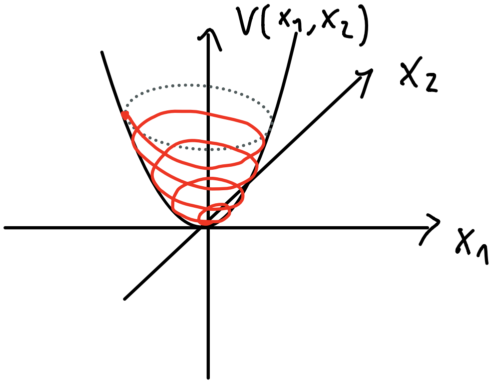
In questa lezione

- ▷ Teorema di linearizzazione
- ▷ Funzioni energia e stabilità di sistemi non lineari
- ▷ Funzioni di Lyapunov
- ▷ Teorema di stabilità di Lyapunov

Teorema di stabilità di Lyapunov (t.c.)

Teorema: Dato un sistema $\dot{x}(t) = f(x(t))$ con punto di equilibrio $\bar{x}$:

1. Se esiste una funzione di Lyapunov $V(x)$ del sistema rispetto all'equilibrio $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è semplicemente stabile.
2. Se inoltre si ha che $\dot{V}(x)$ è definita negativa in un intorno di $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile.



Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico ($m = k = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1,x_2) = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} x_1 \dot{x}_1 + \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} x_2 \dot{x}_2 = x_1 x_2 - x_1 x_2 = 0$$

V funzione di Lyapunov rispetto a $\bar{x}$

$\Downarrow$

$\bar{x}$ semplicemente stabile

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico $(m = k = 1)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$\bar{x} = 0$ semplicemente stabile

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}x_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + \tfrac{1}{2}\left((x_2 + x_1)^2 + x_2^2\right)$$

note

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$, semidef. neg.

$\bar{x} = 0$ semplicemente stabile

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\left((x_2 + x_1)^2 + x_2^2\right)$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$, def. neg.

$\bar{x} = 0$ asintoticamente stabile !!

note

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2} x_2^2$$

$$\dot{V}(x_1, x_2) = g(\sin x_1)\dot{x}_1 + x_2 \dot{x}_2 = g(\cancel{\sin x_1})x_2 - g(\cancel{\sin x_1})x_2 = 0$$

Per il teorema di Lyapunov $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ è sempl. stabile

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

3. Pendolo semplice ($m = \ell = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$\dot{V}(x_1, x_2) = 0$, semidef. neg.

$\bar{x} = 0$ semplicemente stabile !

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito $(m = \ell = \nu = 1)$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2} x_2^2$$

$$V(x_1, x_2) = 2g(1 - \cos x_1) + \tfrac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$$

note

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$, semidef. neg.

$\bar{x} = 0$ semplicemente stabile

$V(x_1, x_2) = 2g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2 - g x_1 \sin x_1$, def. neg.

$\bar{x} = 0$ asintoticamente stabile !!

note

Teorema di stabilità di Lyapunov (t.d.)

Teorema: Dato un sistema $x(t+1) = f(x(t))$ con punto di equilibrio $\bar{x}$:

1. Se esiste una funzione di Lyapunov $V(x)$ del sistema rispetto all'equilibrio $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è semplicemente stabile.
2. Se inoltre si ha che $\Delta V(x(t))$ è definita negativa in un intorno di $\bar{x}$ allora $\bar{x}$ è asintoticamente stabile.

$$V(x(t+1)) - V(x(t))$$

Teorema di Lyapunov (t.d.): esempi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ utilizzando $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

note

Teorema di Lyapunov (t.d.): esempi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ utilizzando $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

$\Delta V(x_1, x_2) = -4x_1^4(1 - x_1^2) - 4x_2^4(1 - x_2^2)$, negativa definita attorno a $\bar{x}$

$\Longrightarrow \quad \bar{x} = 0$ asintoticamente stabile

note

Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Teoria dei Sistemi (Mod. A)

Docente: Giacomo Baggio

Lez. 10: Teorema di Linearizzazione e di Lyapunov

Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica

A.A. 2020-2021

✉ baggio@dei.unipd.it

baggiogi.github.io

Teorema di linearizzazione (t.c.): esempi

1. $\dot{x} = \sin x \qquad \bar{x} = 0, \quad \bar{x} = \pi$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

3. $\dot{x} = \alpha x^3, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0$

note

G. Baggio — Lez. 10: Teorema di Linearizzazione e di Lyapunov — 17 Marzo 2021

1) $\dot{x} = \sin x$

$\bar{x} = 0 : \quad \dot{x} = x \quad F = 1 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile

$\bar{x} = \pi : \quad \dot{z} = -z \quad F = -1 \Rightarrow \bar{x}$ è asint. stabile

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$F = J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 1 - 3x_1^2 - x_2^2 & -1 - 2x_1x_2 \\ 1 - 2x_1x_2 & 1 - x_1^2 - 3x_2^2 \end{bmatrix}_{x=\bar{x}}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F)$$

$$= \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = 1 \pm i$$

$\mathrm{Re}[\lambda_{1,2}] > 0 \Rightarrow \bar{x}$ è instabile

3) $\dot{x} = \alpha x^3 \quad \alpha \in \mathbb{R}, \ \bar{x} = 0$

$F = 0 \Rightarrow$ caso critico!

Teorema di linearizzazione (t.d.): esempi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = ax_2(t) + (1-a)x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = -ax_1(t) + (a-1)x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ al variare di $a \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.

note

$$\begin{cases} x_1(t+1) = a\,x_2(t) + (1-a)\,x_2^3(t) = f_1(x_1,x_2) \\ x_2(t+1) = -a\,x_1(t) + (a-1)\,x_1^3(t) = f_2(x_1,x_2) \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ punto di equilibrio

$$F = J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{x=\bar{x}} = \begin{bmatrix} 0 & a + 3(1-a)x_2^2 \\ -a + 3(a-1)x_1^2 & 0 \end{bmatrix}_{x=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det(\lambda I - F) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -a \\ a & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + a^2 \implies \lambda_{1,2} = \pm i a$$

$$|\lambda_{1,2}| = |a|$$

1) $|a| > 1 \implies |\lambda_{1,2}| > 1 \implies \bar{x}$ instabile

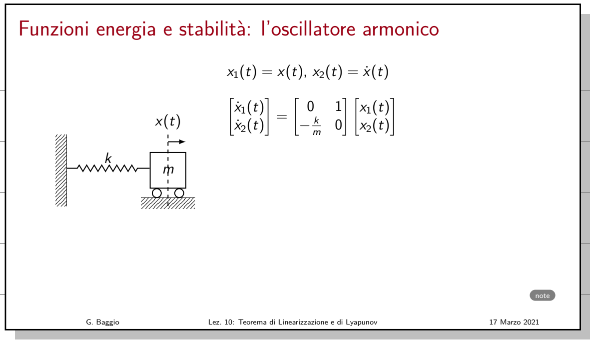
2) $|a| < 1 \implies |\lambda_{1,2}| < 1 \implies \bar{x}$ asint. stabile

3) $|a| = 1$ $(a = \pm 1) \implies |\lambda_{1,2}| = 1 \implies$ caso critico!

<u>$a = 1$</u>: $\begin{cases} x_1(t+1) = x_2(t) \\ x_2(t+1) = -x_1(t) \end{cases}$ $\quad x(t+1) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}_{F} x(t)$

$\lambda_{1,2} = \pm i \implies \bar{x}$ è semplicemente stabile

<u>$a = -1$</u>: ?



$x_1(t) = p(t)$, $\quad x_2(t) = \dot{p}(t)$

$m\ddot{p} = -Kp$ (legge di Newton)

Rappresentazione in spazio di stato:

$$\dot{x}_1 = \dot{p} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{p} = -\frac{K}{m}p = -\frac{K}{m}x_1 \;:\; \dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{m} & 0 \end{bmatrix}}_{F} x(t) \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_F(\lambda) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ K/m & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + \frac{K}{m}$$

$\longrightarrow \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \bar{x}$ è sempl. stabile

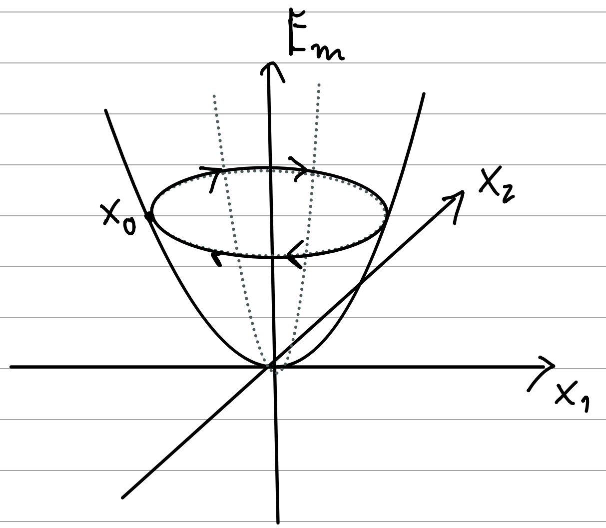
---

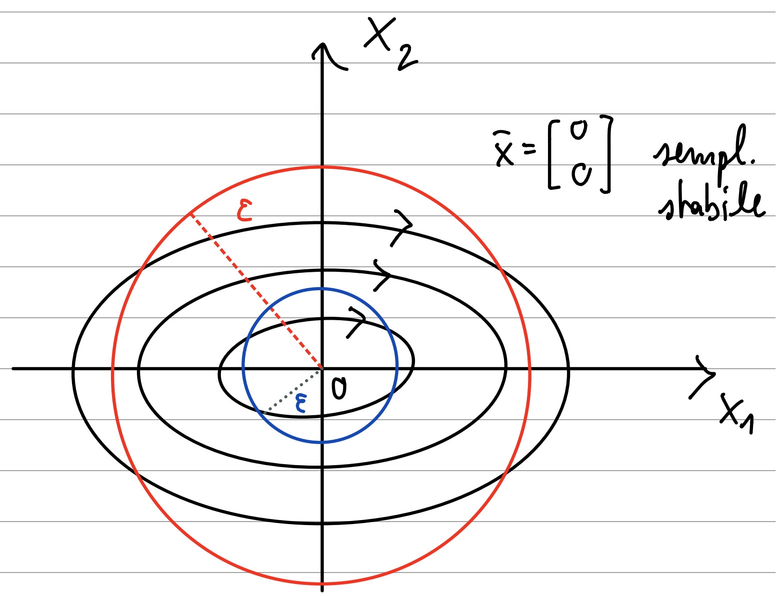
Energia del sistema:

$$E_{tot} = E_m = E_{pot} + E_{cin} = \frac{1}{2}Kp^2 + \frac{1}{2}m\dot{p}^2 = \frac{1}{2}Kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$$

$E_{tot}(t) = E_m(t) = \text{cost} \quad \forall t \geq 0$ (principio di conservazione dell'energia)

$$\dot{E}_m(x_1(t), x_2(t)) = 0$$

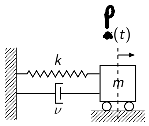




Funzioni energia e stabilità: l'oscillatore armonico smorzato

$x_1(t) = p(t)$, $x_2(t) = \dot{p}(t)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$



$$x_1(t) = p(t), \quad x_2(t) = \dot{p}(t)$$

$$m\ddot{p} = -kp - \nu\dot{p}$$

Rappresentazione in spazio di stato:

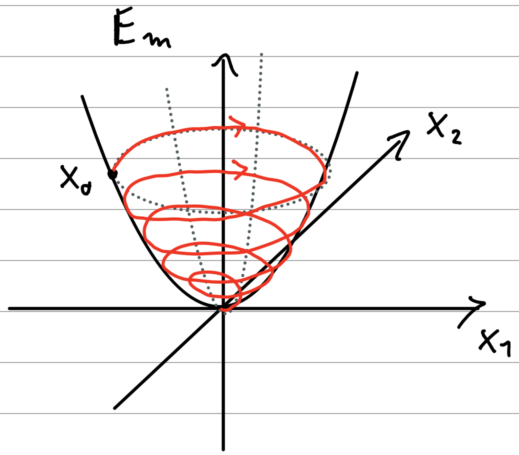
$$\dot{x}_1 = \dot{p} = x_2, \quad \dot{x}_2 = \ddot{p} = -\frac{k}{m}p - \frac{\nu}{m}\dot{p} = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\nu}{m}x_2$$

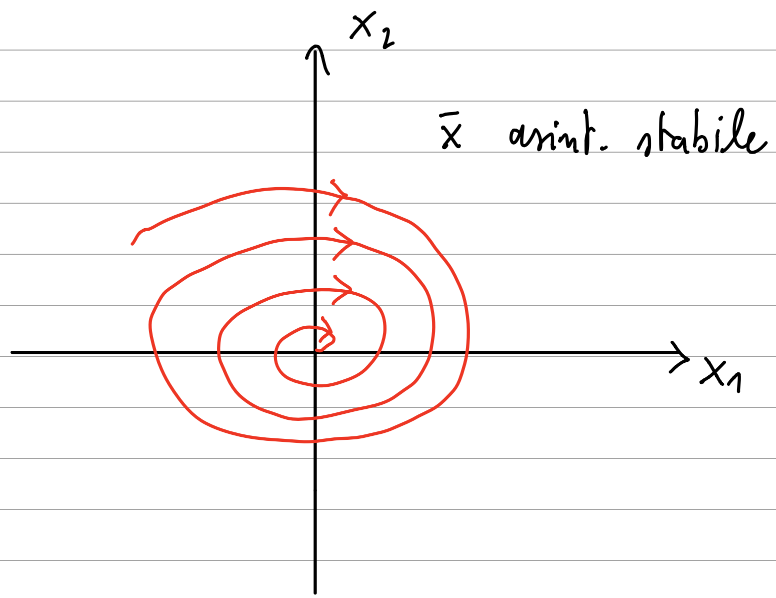
$$\dot{x}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix}}_{F} x(t), \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ equilibrio (asint. stabile)}$$

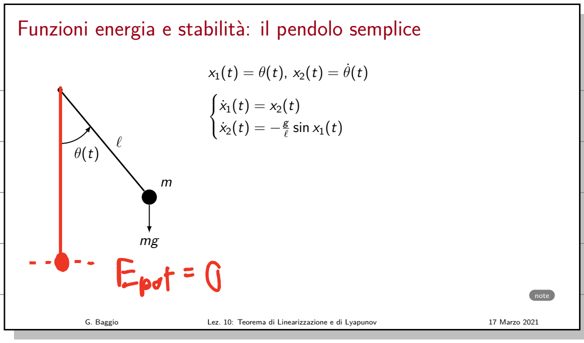
Energia del sistema:

$$E_{tot} = E_m + E_{attr}, \qquad E_m = E_{pot} + E_{cin} = \frac{1}{2}k x_1^2 + \frac{1}{2} m x_2^2$$

$$t_2 \geq t_1: \quad \begin{matrix} E_m(t_2) \leq E_m(t_1) \\ E_{attr}(t_2) \geq E_{attr}(t_1) \end{matrix} \quad \Longrightarrow \quad \dot{E}_m(x_1(t), x_2(t)) \leq 0$$







$$x_1(t) = \theta(t) \qquad x_2(t) = \dot\theta(t)$$

$$m\ell\ddot\theta = -mg\sin\theta \quad \text{(legge di Newton)}$$

Rappresentazione in spazio di stato:

$$\begin{cases} \dot x_1 = \dot\theta = x_2 = f_1(x_1,x_2) \\ \dot x_2 = \ddot\theta = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta = \underbrace{-\dfrac{g}{\ell}\sin x_1}_{f_2(x_1,x_2)} \end{cases}$$

equilibri: $\bar x = \begin{bmatrix} k\pi \\ 0 \end{bmatrix}$, $\boxed{\bar x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$

Stabilità di $\bar x$ tramite linearizzazione:

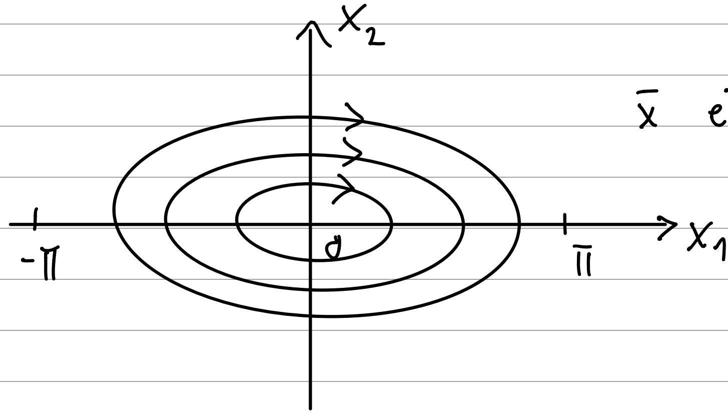
$$F = J_f(\bar x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{\ell}\cos x_1 & 0 \end{bmatrix}_{x=\bar x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{g}{\ell} & 0 \end{bmatrix} \qquad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{caso critico!}$$

Funzione energia:

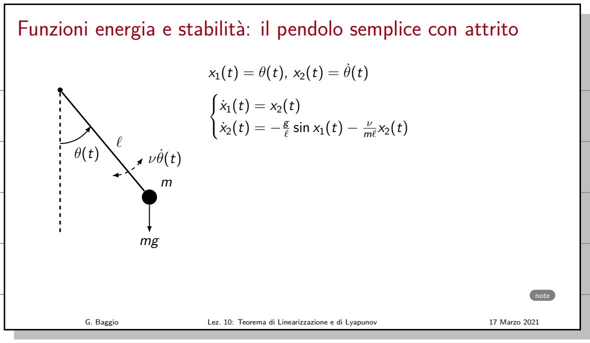
$$E_{tot} = E_m = E_{pot} + E_{cin} = mg\ell(1-\cos\theta) + \frac{1}{2}m\ell^2\dot\theta^2$$
$$= mg\ell(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}m\ell^2 x_2^2$$

$E_{tot}(t) = E_m(t) = \text{cost} \quad \forall t \geq 0$ (conservazione dell'energia)

$\dot E_m(t) = 0$



$\bar x$ é sempl. stabile



$x_1 = \theta \,,\quad x_2 = \dot\theta$

$m\ell\ddot\theta = -mg\sin\theta - \nu\dot\theta$

Rappresentazione in spazio di stato:

$$\begin{cases} \dot x_1 = \dot\theta = x_2 \\ \dot x_2 = \ddot\theta = -\dfrac{g}{\ell}\sin\theta - \dfrac{\nu}{m\ell}\dot\theta = -\dfrac{g}{\ell}\sin x_1 - \dfrac{\nu}{m\ell}x_2 \end{cases}$$

$\bar x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ punto di eq.

Energia del sistema:

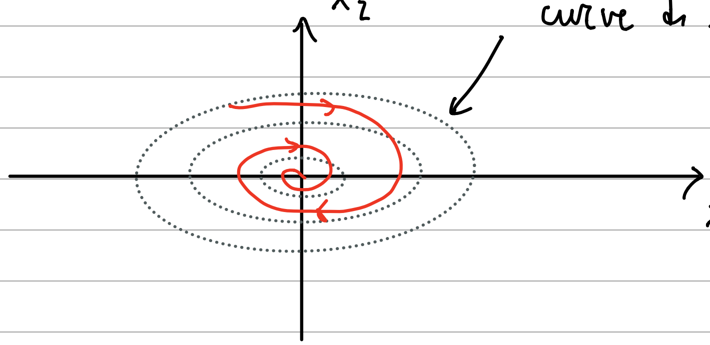
$E_{tot} = E_m + E_{attr}$

$E_m = E_{pot} + E_{cin} = mg\ell(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}m\ell^2 x_2^2$

$t_2 \geq t_1:\quad E_m(t_2) \leq E_m(t_1)$ $\qquad \dot E_m(x_1(t), x_2(t)) \leq 0$

$\qquad\quad E_{attr}(t_2) \geq E_{attr}(t_1)$

curve di livello ($E_m = \text{cost}$)



$\bar x$ è asint. stabile

Funzioni di Lyapunov (t.c.): esempi

1. Oscillatore armonico smorzato ($\bar{x} = 0$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \qquad V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$$

2. Pendolo semplice con attrito ($\bar{x} = 0$):

$$V(x_1, x_2) = mg\ell(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}m\ell^2 x_2^2$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\frac{g}{\ell}\sin x_1(t) - \frac{\nu}{m\ell}x_2(t) \end{cases}$$

note

1) $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\nu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ $\qquad V(x_1,x_2) = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}mx_2^2$

- $V(x_1,x_2)$ def. pos.? sì
- $\dot{V}(x_1,x_2) = \frac{1}{2}k(2x_1)\dot{x}_1 + \frac{1}{2}m(2x_2)\dot{x}_2$
  $= kx_1x_2 + mx_2\left(-\frac{k}{m}x_1 - \frac{\nu}{m}x_2\right)$
  $= \cancel{kx_1}x_2 - \cancel{kx_1}x_2 - \nu x_2^2 = -\nu x_2^2$ semidef. negativa

$\Rightarrow V$ è funzione di Lyapunov rispetto a $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\nu}{m\ell}x_2 \end{cases}$ $\quad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad V(x_1,x_2) = mg\ell(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}m\ell^2x_2^2$

- $V(x_1,x_2)$ def. pos.? sì, V def. pos. in un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$
- $\dot{V}(x_1,x_2) = mg\ell(\sin x_1)\dot{x}_1 + \frac{1}{\cancel{2}}m\ell^2(\cancel{2}x_2)\dot{x}_2$
  $= mg\ell(\sin x_1)x_2 + m\ell^2x_2\left(-\frac{g}{\ell}\sin x_1 - \frac{\nu}{m\ell}x_2\right)$
  $= \cancel{mg\ell(\sin x_1)}x_2 - \cancel{mg\ell(\sin x_1)}x_2 - \nu\ell x_2^2 = -\nu\ell x_2^2$ è semidef neg.

$\Rightarrow V$ è funzione di Lyapunov rispetto a $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

2. Oscillatore armonico smorzato ($m = k = \nu = 1$):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2$

$V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\left((x_2 + x_1)^2 + x_2^2\right)$

note

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2^2$ è funzione di Lyapunov

$\dot{V}(x_1, x_2) = -x_2^2$ semidef. neg.

$\bar{x}$ è sempl. stabile per Lyapunov

2) $V(x_1, x_2) = x_1^2 + \frac{1}{2}\left((x_2 + x_1)^2 + x_2^2\right)$

$V(x_1, x_2)$ è def. pos.

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}(x_2 + x_1)(\dot{x}_2 + \dot{x}_1) + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\, x_2 \dot{x}_2$$

$$= 2x_1x_2 + (x_2 + x_1)(\cancel{x_2} - x_1 - \cancel{x_2}) + x_2(-x_1 - x_2)$$

$$= 2\cancel{x_1}x_2 - \cancel{x_1}x_2 - x_1^2 - \cancel{x_1}x_2 - x_2^2 = -x_1^2 - x_2^2$$

$$= -(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{def. neg.}$$

$\Rightarrow \bar{x}$ è asint. stabile

Teorema di Lyapunov (t.c.): esempi

4. Pendolo semplice con attrito ($m = \ell = \nu = 1$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) = -g \sin x_1(t) - x_2(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = 0$$

$V(x_1, x_2) = g(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$

$V(x_1, x_2) = 2g(1-\cos x_1)+\frac{1}{2}\left((x_1 + x_2)^2 + x_2^2\right)$

note

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -g \sin x_1 - x_2 \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) $V(x_1,x_2) = g(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$ è funzione di Lyapunov

$\dot{V}(x_1,x_2) = -x_2^2$ semidef. neg.

$\bar{x}$ è sempl. stabile per il teorema di Lyapunov

2) $V(x_1,x_2) = 2g(1-\cos x_1) + \frac{1}{2}\left((x_1+x_2)^2 + x_2^2\right)$

- $V(x_1,x_2)$ è def. pos. in un intorno di $\bar{x}$? sì
- $\dot{V}(x_1,x_2) = 2g(\sin x_1)\dot{x}_1 + \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}(x_1+x_2)(\dot{x}_1+\dot{x}_2) + \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{2}x_2\dot{x}_2$

$$= 2g(\sin x_1)x_2 + (x_1+x_2)(\cancel{x_2} - g\sin x_1 - \cancel{x_2}) + x_2(-g\sin x_1 - x_2)$$

$$= \cancel{2g(\sin x_1)x_2} - g(\sin x_1)x_1 - \cancel{g(\sin x_1)x_2} - \cancel{g(\sin x_1)x_2} - x_2^2$$

$$= -g(\sin x_1)x_1 - x_2^2 = -\Big(g\underbrace{(\sin x_1)x_1}_{>0 \text{ in un intorno di } \bar{x}} + x_2^2\Big)$$ def. negativa in un intorno di $\bar{x}$

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ è asintoticamente stabile per il teorema di Lyapunov

Teorema di Lyapunov (t.d.): esempi

1. Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases}$$

Studiare la stabilità di $\bar{x} = 0$ utilizzando $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

$\underline{a = -1}$

$$\begin{cases} x_1(t+1) = -x_2(t) + 2x_2^3(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) - 2x_1^3(t) \end{cases} \qquad \bar{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

- V è def. pos.? sì
- $$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t)) \\ &= x_1(t+1)^2 + x_2(t+1)^2 - x_1(t)^2 - x_2(t)^2 \\ &= (-x_2 + 2x_2^3)^2 + (x_1 - 2x_1^3)^2 - x_1^2 - x_2^2 \\ &= \cancel{x_2^2} + 4x_2^6 - 4x_2^4 + \cancel{x_1^2} + 4x_1^6 - 4x_1^4 - \cancel{x_1^2} - \cancel{x_2^2} \\ &= -4\underbrace{x_2^4(1 - x_2^2)}_{>0} - 4\underbrace{x_1^4(1 - x_1^2)}_{>0} \quad \text{def. negativa} \end{aligned}$$

in un intorno di $\bar{x}$

Per il teorema di Lyapunov, $\bar{x}$ è asint. stabile