

## Esempi di domande della prova orale

(aggiornato al 01/05/21)

N.B. *Le domande che seguono sono **indicative**: servono a dare un'idea della tipologia di domande della prova orale. Ciò significa che è piuttosto improbabile (ma non impossibile) che durante la prova orale vengano chieste **esattamente** queste domande.*

### Parte I: Modelli di sistemi dinamici e analisi modale

1. Descrivere le equazioni di un sistema lineare, tempo invariante in spazio di stato a tempo continuo/discreto. Spiegare inoltre che cos'è la proprietà di separazione dello stato.
2. Sia  $F = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Derivare l'espressione dell'esponenziale di matrice  $e^{Ft}$ ,  $t \geq 0$ .
3. Sia  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matrice diagonalizzabile. Illustrare come calcolare l'esponenziale di matrice  $e^{Ft}$ ,  $t \geq 0$ , tramite diagonalizzazione.
4. Illustrare l'utilizzo della forma di Jordan di una matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  per il calcolo di  $e^{Ft}$ ,  $t \geq 0$ , e per la caratterizzazione dei modi elementari di un sistema lineare a tempo continuo.
5. Illustrare l'utilizzo della forma di Jordan di una matrice  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  per il calcolo di  $F^t$ ,  $t \geq 0$ , e per la caratterizzazione dei modi elementari di un sistema lineare a tempo discreto.
6. Derivare le espressioni dell'evoluzione libera e forzata dello stato e dell'uscita nel dominio del tempo del sistema a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

7. Derivare le espressioni dell'evoluzione libera e forzata dello stato e dell'uscita nel dominio del tempo del sistema a tempo discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

8. Dato il sistema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) + Ju(t) \end{cases} \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

derivare l'espressione della matrice di trasferimento  $W(s)$  del sistema.

## Parte II: Stabilità di sistemi dinamici

1. Dare la definizione di traiettoria di stato relativa alla condizione iniziale  $x_0$  di un sistema non lineare e di ritratto di fase di un sistema non lineare. Illustrare un esempio a scelta di ritratto di fase per il caso di sistemi lineari di dimensione 2.
2. Dare la definizione di punto di equilibrio di un sistema non lineare a tempo continuo/discreto. Quando un punto di equilibrio è semplicemente/asintoticamente stabile?
3. Quando un sistema lineare a tempo continuo/discreto è semplicemente/asintoticamente stabile?
4. Derivare il linearizzato di un sistema non lineare a tempo continuo/discreto attorno ad un equilibrio. Come è legata la stabilità del linearizzato alla stabilità del punto di equilibrio del sistema non lineare?
5. Dare la definizione di funzione di Lyapunov di un sistema a tempo continuo/discreto e spiegare (in maniera intuitiva, possibilmente servendosi di un esempio) il legame tra funzioni energia di un sistema fisico e funzioni di Lyapunov.
6. Dare l'enunciato del teorema di Lyapunov a tempo continuo/discreto. Sia  $V(x)$  una funzione di Lyapunov di un sistema a tempo continuo relativa ad un equilibrio  $\bar{x}$ . Se  $\dot{V}(x)$  è solo semidefinita negativa (e non definita negativa) in un intorno di  $\bar{x}$ , come è possibile stabilire se l'equilibrio è semplicemente o asintoticamente stabile?

## Parte III: Analisi e controllo di sistemi dinamici

1. Dato un sistema lineare a tempo discreto, dare la definizione di spazio raggiungibile  $X_R(t)$  in  $t \in \mathbb{Z}_+$  passi. Illustrare le proprietà di questo spazio al variare di  $t \in \mathbb{Z}_+$ .
2. Illustrare il criterio del rango di raggiungibilità per sistemi lineari a tempo discreto/continuo.
3. Dato un sistema lineare a tempo discreto raggiungibile in  $t$  passi, derivare la forma dell'ingresso a minima energia che porta il sistema da  $x(0) = x_0$  a  $x(t) = x^*$ .
4. Dato un sistema lineare a tempo continuo/discreto non completamente raggiungibile, descrivere la forma canonica di Kalman di raggiungibilità del sistema, illustrando la costruzione del cambio di base che porta il sistema in questa forma.
5. Dare l'enunciato del criterio PBH di raggiungibilità, possibilmente riportando anche la dimostrazione di una implicazione di questo teorema.
6. Dato un sistema lineare a tempo discreto, dare la definizione di spazio controllabile  $X_C(t)$  in  $t \in \mathbb{Z}_+$  passi e illustrare un criterio di controllabilità a scelta.
7. Dare una panoramica dei principali problemi di controllo, spiegandone brevemente pregi e difetti.
8. Descrivere la forma di un sistema lineare a tempo discreto/continuo retroazionato staticamente dallo stato. Com'è fatta la forma di Kalman di raggiungibilità del sistema retroazionato?
9. Spiegare come l'allocazione degli autovalori di un sistema retroazionato staticamente dallo stato è legata alla raggiungibilità del sistema (possibilmente riportando un cenno di dimostrazione).
10. Dare l'enunciato del lemma di Heymann e spiegare come si può utilizzare questo risultato per risolvere il problema di allocazione degli autovalori per sistemi raggiungibili da ingressi multipli.

11. Spiegare, a grandi linee, che cos'è l'osservabilità e la ricostruibilità di un sistema. Dare la definizione di spazio non osservabile  $X_{NO}(t)$  in  $t \in \mathbb{Z}_+$  passi di un sistema lineare a tempo discreto.
12. Dare la definizione di sistema duale di un sistema lineare a tempo discreto/continuo. Spiegare come l'osservabilità e ricostruibilità del sistema originale si relaziona alla raggiungibilità e controllabilità del sistema duale (riportando possibilmente i passaggi della derivazione).
13. Dato un sistema lineare a tempo continuo/discreto, dare le definizioni di stimatore dello stato ad anello aperto e chiuso. Spiegare come si comporta l'errore di stima nei due casi.
14. Riportare le equazioni dinamiche e il diagramma a blocchi del regolatore di un sistema lineare a tempo continuo/discreto. Trasformando opportunamente queste equazioni, derivare il principio di separazione e illustrare le conseguenze di questo risultato per la sintesi di un regolatore stabilizzante.