Lezione 7: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema autonomo a tempo discreto $x(t+1) = Fx(t)$, dove

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Si determinino i modi elementari del sistema e il loro carattere (limitato/convergente/divergente). Inoltre, si calcoli l'evoluzione del sistema a partire dalle condizioni iniziali

$$x'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x''(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x'''(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 2. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Si determini la funzione di trasferimento del sistema e l'evoluzione forzata del sistema in corrispondenza degli ingressi

$$u'(t) = 2^{-t},\ t \geq 0, \quad \text{e} \quad u''(t) = 1 + 2^{-t},\ t \geq 0.$$

Esercizio 3. Si consideri il seguente sistema a tempo discreto

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \begin{bmatrix} 0.5 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

Si determini l'evoluzione complessiva del sistema (libera + forzata) in corrispondenza dell'ingresso $u(t) = 0.8^t, t \geq 0$, e condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Soluzioni

Esercizio 1. Modi: $(-2)^t$ (divergente), $\delta(t)$ (convergente), 1^t (limitato).

Evoluzione libera: $x'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (-2)^t \end{bmatrix}$, $x''(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x'''(t) = \begin{bmatrix} 2-\delta(t) \\ 1 \\ 1-\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{1}{2}(-2)^t \end{bmatrix}$, $t \geq 0$.

Esercizio 2. F.d.T.: $W(z) = \frac{1}{(z-1/2)^2}$.

Evoluzione forzata: $y'(t) = \binom{t}{2} 2^{-t+2}$, $y''(t) = \binom{t}{2} 2^{-t+2} - t2^{-t+2} - 2^{-t+2} + 4$, $t \geq 0$.

Esercizio 3. Evoluzione libera + forzata: $y(t) = \frac{1}{3} 2^{-t+1} + \frac{10}{3} 0.8^t$, $t \geq 0$.