Lezione 5: esercizi suggeriti

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1+\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si determinino gli autovalori di F e le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori di F al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice F è diagonalizzabile?

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se possibile, si calcoli e^{Ft}, $t \geq 0$, tramite diagonalizzazione di F.

Esercizio 3. Sia

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli la forma di Jordan di F al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad f \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli la forma di Jordan di F al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzioni

Esercizio 1. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$, $g_1 = \begin{cases} 1 & \alpha \neq -2 \\ 2 & \alpha = -2 \end{cases}$, $g_2 = 1$. F diagonalizzabile se $\alpha = -2$.

Esercizio 2. $e^{Ft} = Te^{F_D t}T^{-1}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $F_D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Esercizio 3. $F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$ se $\alpha \neq 1, 2$, $F_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ se $\alpha = 2$, $F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se $\alpha = 1$.

Esercizio 4. $F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se $\alpha \neq 0$, $F_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ se $\alpha = 0$.