Lezione 3 & 4: esercizi

Esercizio 1. Si consideri la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Si calcoli attraverso il metodo diretto e^{Ft}, $t \geq 0$.

Esercizio 2. Si consideri la matrice

$$F = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ -f_2 & f_1 \end{bmatrix} \quad f_1, f_2 \in \mathbb{R}.$$

Si calcoli attraverso il metodo diretto e^{Ft}, $t \geq 0$.

Esercizio 3. Si consideri la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1+f & 1 \end{bmatrix}, \quad f \in \mathbb{R}.$$

Si determinino gli autovalori di F e le molteplicità algebriche e geometriche degli autovalori di F al variare del parametro $f \in \mathbb{R}$. Per quali valori di $f \in \mathbb{R}$ la matrice F è diagonalizzabile?

Esercizio 4. Si consideri la matrice

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se possibile, si calcoli e^{Ft}, $t \geq 0$, tramite diagonalizzazione di F.

Soluzioni

Esercizio 1. $e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{3t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$.

Esercizio 2. $e^{Ft} = e^{f_1 t} \begin{bmatrix} \cos(f_2 t) & \sin(f_2 t) \\ -\sin(f_2 t) & \cos(f_2 t) \end{bmatrix}$.

Esercizio 3. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$, $g_1 = \begin{cases} 1 & f \neq -2 \\ 2 & f = -2 \end{cases}$, $g_2 = 1$. F diagonalizzabile se $f = -2$.

Esercizio 4. $e^{Ft} = Te^{F_D t}T^{-1}$, $T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, $F_D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.