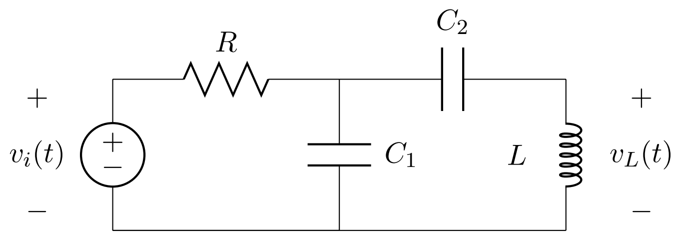
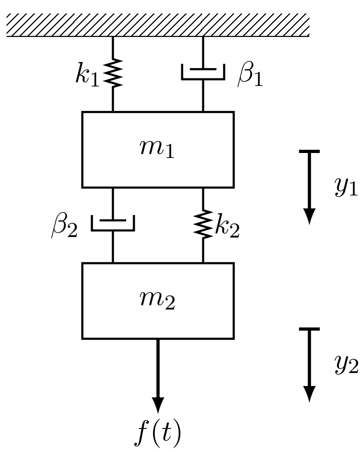
Lezione 2: esercizi suggeriti

Esercizio 1. Si derivi un modello in rappresentazione esterna (equazioni differenziali e funzione di trasferimento) e interna (spazio di stato) per il seguente circuito dove l'ingresso è la tensione del generatore $v_i(t)$ e l'uscita la tensione sull'induttore $v_L(t)$.



Esercizio 2. Si derivi un modello in rappresentazione esterna (equazioni differenziali e funzione di trasferimento) e interna (spazio di stato) per il seguente sistema meccanico dove l'ingresso è la forza esterna $f(t)$ e le uscite gli spostamenti y_1 e y_2 (misurati dalla configurazione di equilibrio) delle due masse.



Esercizio 3. Siano $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ il numero di studenti iscritti al primo, secondo e terzo anno di un corso di laurea triennale nell'anno t, rispettivamente, e sia $u(t)$ il numero di nuovi studenti del corso nell'anno t (cioè quelli che si iscrivono per entrare al primo anno nell'anno successivo). Sia inoltre $y(t)$ il numero di studenti laureati nell'anno t. Sia infine α_i ($0 \leq \alpha_i \leq 1$) il tasso di promossi nell'anno di corso i-esimo e β_i ($0 \leq \beta_i \leq 1$) il tasso di ripetenti nell'anno di corso i-esimo. Si scriva un modello in rappresentazione interna (spazio di stato) che descriva la dinamica degli studenti con $u(t)$ ingresso e $y(t)$ uscita.

Soluzioni

Esercizio 1. Rappresentazione esterna (F.d.T.): $G(s) = \frac{C_2 L s^2}{(C_1 R + C_2 R)s + C_2 L s^2 + C_1 C_2 L R s^3 + 1}$.

Rappresentazione interna: $x = \begin{bmatrix} v_{C_1} & v_{C_2} & i_L \end{bmatrix}^\top$, $u = v_i$, $y = v_L$,

$$F = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC_1} & 0 & -\frac{1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} \frac{1}{RC_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \end{bmatrix},\ J = 0.$$

Esercizio 2. Rappresentazione esterna (F.d.T.): $G(s) = \frac{1}{d(s)} \begin{bmatrix} m_2(k_2 + b_2 s) \\ m_2(k_1 + k_2 + (\beta_1 + \beta_2)s + m_1 s^2) \end{bmatrix}$, $d(s) = m_1 m_2 s^4 + (\beta_1 m_2 + \beta_2 m_1 + \beta_2 m_2)s^3 + (k_1 m_2 + k_2 m_1 + k_2 m_2 + \beta_1 \beta_2)s^2 + (\beta_1 k_2 + \beta_2 k_1)s + k_1 k_2$.

Rappresentazione interna: $x = \begin{bmatrix} y_1 & \dot{y}_1 & y_2 & \dot{y}_2 \end{bmatrix}^\top$, $u = f$, $y = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix}^\top$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{-\beta_1 - \beta_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & \frac{\beta_2}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{\beta_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{\beta_2}{m_2} \end{bmatrix},\ G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ J = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Esercizio 3. Rappresentazione interna: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & \beta_2 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \beta_3 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $J = 0$.