Lezione 19: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si discuta l'osservabilità del sistema e si determinino gli spazi non osservabili $X_{NO}(t)$ in $t = 1, 2, \dots$ passi. Inoltre, si discuta la ricostruibilità del sistema e si determinino gli spazi $X_{NR}(t)$ non ricostruibili in $t = 1, 2, \dots$ passi.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si discuta l'osservabilità e la ricostruibilità del sistema. Inoltre, si determini, se esiste, l'insieme di stati iniziali compatibili con i valori di uscita $y(0) = 1$, $y(1) = 1$, $y(2) = 1$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini, se possibile, lo stato iniziale del sistema $x(0)$ sapendo che all'ingresso $u(0) = u(1) = 1$ corrisponde l'uscita $y(0) = y(1) = y(2) = -1$.

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare autonomo a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Fx(t) \\ y(t) = Hx(t) \end{cases} \qquad F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Si discuta l'osservabilità del sistema al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Soluzioni

Esercizio 1. $X_{NO}(1) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $X_{NO}(t) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, per ogni $t \geq 2$. Poichè $X_{NO} \neq \{0\}$ iI sistema non è osservabile. $X_{NR}(t) = X_{NO}(t)$ per ogni $t \geq 1$. Il sistema non è ricostruibile.

Esercizio 2. Il sistema non è osservabile ma è ricostruibile. Non esiste nessuna condizione iniziale compatibile con i valori dell'uscita riportati.

Esercizio 3. Il sistema è osservabile quindi è possibile trovare la condizione iniziale cercata che risulta essere $x(0) = \begin{bmatrix}-4 & -3 & -1\end{bmatrix}^\top$.

Esercizio 4. Il sistema è osservabile se e solo se $\alpha \neq 0$.