Lezione 15: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -4 \\ 4 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini lo spazio raggiungibile $X_R(t)$, $t > 0$ e si determini la raggiungibilità del sistema. Si determinino inoltre gli autovalori del sottosistema non raggiungibile (se esiste).

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini, se esiste, un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, che porti il sistema dallo stato $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato $x(1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo continuo

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Studiare la raggiungibilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Nei casi in cui il sistema non è raggiungibile (se esistono) si calcoli un cambio di base per portare il sistema in forma di Kalman.

Soluzioni

Esercizio 1. $X_R(t) = \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $t > 0$. Il sistema non è raggiungibile. L'autovalore del sottosistema non raggiungibile è $\lambda = -1$.

Esercizio 2. L'ingresso esiste e ha la forma $u(\tau) = 6\tau - 2$, $\tau \in [0, 1]$,

Esercizio 3. Il sistema è raggiungibile solo per $\alpha \neq 0$. Per $\alpha = 0$, un cambio di base (non unico) che porta il sistema in forma di Kalman è $T = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.