Lezione 14: esercizi suggeriti

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Calcolare la forma canonica di Kalman del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e il relativo cambio di base T.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini se il sistema è raggiungibile/controllabile, e, se possibile, si calcoli un ingresso $u(t)$ che porti nel minor tempo possibile il sistema dallo stato iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato finale $x^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determinino gli spazi raggiungibili $X_R(t)$ e controllabili $X_C(t)$ del sistema per $t = 1, 2, \ldots$. Inoltre si determini se il sistema è raggiungibile/controllabile.

Soluzioni

Esercizio 1. $F_K = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \alpha \end{array}\right]$, $G_K = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Cambio di base (non unico): $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

Esercizio 2. Il sistema non è raggiungibile, ma è controllabile (in 2 passi). Il tempo minimo necessario per controllare a zero lo stato iniziale x_0 è $t^* = 2$, e la sequenza di ingresso cercata ha valori $u(0) = -4$, $u(1) = 0$.

Esercizio 3. $X_R(1) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $X_R(k) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$, $k \geq 2$. $X_C(1) = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1/4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, $X_C(k) = \mathbb{R}^3$, $k \geq 2$. Il sistema non è raggiungibile, ma è controllabile (in 2 passi).