Lezione 13: esercizi suggeriti

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Si determinino gli spazi raggiungibili $X_R(t)$, $t = 1, 2, \ldots$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si discuta la raggiungibilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini se il sistema è raggiungibile, e, se possibile, si calcoli l'ingresso a minima energia $u(t)$ che porti il sistema dallo stato iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato finale $x^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ in $k = 1, 2$ passi.

Soluzioni

Esercizio 1. $X_R(1) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $X_R(2) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $X_R(k) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\\alpha\end{bmatrix}\right\}$, $k \geq 3$. Il sistema è raggiungibile (in 3 passi) se e solo se $\alpha \neq 0$.

Esercizio 2. Il sistema è raggiungibile (in 2 passi). Esiste un solo ingresso che porta il sistema in x^* in un passo: $u(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. L'ingresso a minima energia che porta il sistema in x^* in due passi è: $u(0) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $u(1) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.