Lezione 13 & 14: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Si determinino gli spazi raggiungibili $X_R(t)$, $t = 1, 2, \dots$, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Si discuta la raggiungibilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si determini se il sistema è raggiungibile, e, se possibile, si calcoli l'ingresso a minima energia $u(t)$ che porti il sistema dallo stato iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato finale $\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ in $k = 1, 2$ passi.

Esercizio 3. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

Calcolare la forma canonica di Kalman del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ e il relativo cambio di base T.

Esercizio 4. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Si determini se il sistema è raggiungibile/controllabile, e, se possibile, si calcoli un ingresso $u(t)$ che porti nel minor tempo possibile il sistema dallo stato iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato finale $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.

Esercizio 5. Si consideri il sistema lineare a tempo discreto

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Si determinino gli spazi raggiungibili $X_R(t)$ e controllabili $X_C(t)$ del sistema per $t = 1, 2, \dots$. Inoltre si determini se il sistema è raggiungibile/controllabile.

Soluzioni

Esercizio 1. $X_R(1) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $X_R(2) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $X_R(k) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\\alpha\end{bmatrix}\right\}$, $k \geq 3$. Il sistema è raggiungibile (in 3 passi) se e solo se $\alpha \neq 0$.

Esercizio 2. Il sistema è raggiungibile (in 2 passi). Esiste un solo ingresso che porta il sistema in $\bar{x}$ in un passo: $u(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. L'ingresso a minima energia che porta il sistema in $\bar{x}$ in due passi è: $u(0) = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$, $u(1) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

Esercizio 3. $F_K = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & \alpha \end{array}\right], G_K = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. Cambio di base (non unico): $T = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

Esercizio 4. Il sistema non è raggiungibile, ma è controllabile (in 2 passi). Il tempo minimo necessario per controllare a zero lo stato iniziale x_0 è $\bar{t} = 2$, e la sequenza di ingresso cercata ha valori $u(0) = -4$, $u(1) = 0$.

Esercizio 5. $X_R(1) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$, $X_R(k) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$, $k \geq 2$. $X_C(1) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1/4\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$, $X_C(k) = \mathbb{R}^3$, $k \geq 2$. Il sistema non è raggiungibile, ma è controllabile (in 2 passi).