

## Lezione 10: esercizi

Esercizio 1. Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - 4 \sin(x_1(t)) \\ \dot{x}_2(t) = -2 \sin^2(x_1(t)) + x_2(t)e^{x_1(t)} \end{cases}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio  $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^\top = [0 \ 0]^\top$  al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  utilizzando la linearizzazione.

Esercizio 2. Si consideri il sistema non lineare a tempo continuo

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = (\alpha - 1)x_1(t) - x_1^3(t) \\ \dot{x}_2(t) = -\alpha x_2(t) - x_2^3(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio  $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^\top = [0 \ 0]^\top$  al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  utilizzando la linearizzazione, o, nei casi critici, usando la funzione  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ .

Esercizio 3. Si consideri il sistema non lineare a tempo discreto

$$\begin{cases} x_1(t+1) = \alpha x_1(t)(1 - x_1^2(t)) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Si studi la stabilità del punto di equilibrio  $\bar{x} = [x_1 \ x_2]^\top = [0 \ 0]^\top$  al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  utilizzando la linearizzazione, o, nei casi critici, usando la funzione  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^4$ .

## Soluzioni

Esercizio 1. L'equilibrio è instabile, perchè il linearizzato ha un autovalore in  $+1$ .

Esercizio 2. L'equilibrio è asintoticamente stabile per  $0 < \alpha < 1$  e instabile per  $\alpha < 0$  e  $\alpha > 1$  (caso critico:  $\alpha = 0, 1$  si risolve con il teorema di Lyapunov notando che  $\dot{V}(x_1, x_2) = -2((1 - \alpha)x_1^2 + \alpha x_2^2 + x_1^4 + x_2^3)$  è definita negativa per  $\alpha = 0, 1$ ).

Esercizio 3. L'equilibrio è asintoticamente stabile per  $|\alpha| < 1$  e instabile per  $|\alpha| > 1$  (caso critico:  $|\alpha| = 1$  si risolve con il teorema di Lyapunov notando che  $\Delta V(x_1, x_2) = -x_1^4(1 - x_1^2) - x_2^4$  è definita negativa).