Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 23/04/2021

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.*

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t)\\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 1+\alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 1-\alpha & \alpha-1 & 1-\alpha \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 1}$**, dire, senza effettuarne il calcolo ma giustificando la risposta, se esiste un ingresso $u(\tau)$, $\tau \in [0, 2]$, tale da portare lo stato del sistema da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ a $x(2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.
3. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, determinare **tutte e sole** le condizioni iniziali $x(0) \in \mathbb{R}^3$ che generano **un'evoluzione libera dell'uscita** limitata nel tempo. [Suggerimento: *sfruttare la forma delle matrici F e H*]

Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) + x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_1(t) + \alpha x_2(t) \qquad \alpha \in \mathbb{R}.\\ \dot{x}_3(t) &= x_3^3(t)(x_3(t) - 2)\end{aligned}$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando, quando possibile, il teorema di linearizzazione.
3. Per gli eventuali **casi critici** della linearizzazione, studiare la stabilità degli equilibri usando la candidata funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ e i teoremi di Lyapunov e, se necessario, Krasowskii.

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t)\\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} g_1 & g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è raggiungibile e per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è osservabile.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, determinare tutti i possibili controllori dead-beat del sistema che utilizzano il **solo primo ingresso** (cioè la sola colonna g_1 di G).
3. Tra i controllori dead-beat trovati al punto 2., indicarne uno che porta a zero lo stato del sistema retroazionato nel **minor numero possibile di passi.***

---

*[**+0.5 pti extra**] Usando entrambi gli ingressi (cioè l'intera matrice G), esiste un controllore dead-beat che porta a zero lo stato del sistema retroazionato in un numero di passi inferiore a quello trovato nel punto 3.? Giustificare la risposta.