Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 29/01/2021: **Soluzioni**

Esercizio 1 [9 pti].

1. Il vettore $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix}^\top$ è un equilibrio del sistema se e solo se soddisfa

$$\begin{aligned} 0 &= -\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \\ 0 &= (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)\sin(\bar{x}_1) - (3-\alpha)\bar{x}_2 \end{aligned} \tag{1}$$

Dalla prima equazione di (1) abbiamo $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$, che sostituita nella seconda porge l'equazione

$$\bar{x}_2(2\sin(\bar{x}_2) - 3 + \alpha) = 0 \tag{2}$$

Consideriamo ora separatamente i due casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$:

- Caso $\alpha = 0$. In questo caso (2) ha come unica soluzione $\bar{x}_2 = 0$; infatti l'equazione $2\sin(\bar{x}_2) - 3 = 0$ non ammette soluzioni reali. Quindi abbiamo un unico equilibrio nell'origine, cioè $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.
- Caso $\alpha = 1$. In questo caso (2) ha come soluzioni $\bar{x}_2 = 0$ e $\bar{x}_2 = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ (queste ultime sono tutte e sole le soluzioni dell'equazione $2\sin(\bar{x}_2) - 2 = 0$). Concludiamo che il sistema ha infiniti equilibri, uno nell'origine $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ e gli altri della forma $\bar{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \pi/2 + 2\pi k & \pi/2 + 2\pi k \end{bmatrix}^\top$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. La matrice Jacobiana del sistema valutata in un generico equilibrio $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 \end{bmatrix}^\top$ assume la forma

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \sin(x_1) + (x_1 + x_2)\cos(x_1) & \sin(x_1) - 3 + \alpha \end{bmatrix}.$$

Consideriamo separatamente i due casi $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$:

- Caso $\alpha = 0$. In questo caso, l'unico equilibrio $\bar{x}$ l'origine e la matrice Jacobiana valutata nell'origine ha la forma

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},$$

la quale ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_1 = -3$, quindi con parte reale negativa. Dal Teorema di linearizzazione segue che l'equilibrio è asintoticamente stabile.

- Caso $\alpha = 1$. In questo caso il sistema ha infiniti equilibri. Valutata nell'origine $\bar{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$, la matrice Jacobiana diventa

$$J(\bar{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

che ha autovalori $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_1 = -2$. Dal Teorema di linearizzazione segue che l'origine è un punto di equilibrio asintoticamente stabile. Valutata nei rimanenti equilibri $\bar{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \pi/2 + 2\pi k & \pi/2 + 2\pi k \end{bmatrix}^\top$, $k \in \mathbb{Z}$, la matrice Jacobiana diventa

$$J(\bar{x}^{(k)}) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

In questo caso $J(\bar{x}^{(k)})$ ha autovalori $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -2$. Siamo nel caso critico del Teorema di Linearizzazione e quindi, usando questo teorema, non possiamo concludere nulla circa la stabilità degli equilibri.

3. Fissato $\alpha = 0$, l'unico equilibrio del sistema è l'origine. Come prima cosa, osserviamo che la candidata funzione di Lyapunov è positiva definita, infatti soddisfa $V(x_1, x_2) > 0$, $\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Calcoliamo quindi la derivata $\dot{V}(x_1, x_2)$ (considerando $\alpha = 0$):

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= 2x_1(-x_1 + x_2) + 2x_2((x_1 + x_2)\sin(x_1) - 3x_2)\\ &= -2x_1^2 + 2x_1x_2(1 + \sin(x_1)) + 2(\sin(x_1) - 3)x_2^2.\end{aligned}$$

Usando le disuguaglianze $1 + \sin(x_1) \leq 2$ e $\sin(x_1) - 3 \leq -2$, abbiamo

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= -2x_1^2 + 2x_1x_2(1 + \sin(x_1)) + 2(\sin(x_1) - 3)x_2^2\\ &\leq -2x_1^2 + 4|x_1||x_2| - 4x_2^2 = \begin{bmatrix}|x_1| & |x_2|\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -4\end{bmatrix}}_{=:P} \begin{bmatrix}|x_1|\\ |x_2|\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Poichè la matrice P è definita negativa (cosa che si può verificare facilmente tramite test di Sylvester), $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$, $\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0)$. Quindi, per il Teorema di Lyapunov, concludiamo che l'equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile. La stabilità asintotica (locale) dell'origine era già stata verificata al punto 2., è interessante osservare tuttavia che, in questo caso, l'approccio tramite funzione di Lyapunov ci permette di concludere che l'origine è *globalmente* asintoticamente stabile, perché le condizioni $V(x_1, x_2) > 0$ e $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ valgono *per ogni* $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

Esercizio 2 [9 pti].

1. Gli autovalori di F sono 0, 1, 2α. Per $\alpha = 0$, F ha due autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$. Per $\alpha = 1/2$, F ha due autovalori $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$. Per $\alpha \neq \{0, 1/2\}$ F ha tre autovalori distinti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2\alpha$. Distinguiamo quindi i tre casi:

   - <u>Caso $\alpha = 0$</u>. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 0$ è:

     $$g_1 = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = 2.$$

     Poiché $\nu_1 = g_1 = 2$ e $\nu_2 = g_2 = 1$, F è diagonalizzabile e ha la seguente forma di Jordan (a meno di permutazioni degli elementi sulla diagonale):

     $$F_J = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

     I modi elementari del sistema sono 1 (limitato) e $\delta(t)$ (convergente, in tempo finito).

   - <u>Caso $\alpha = 1/2$</u>. La molteplicità geometrica di $\lambda_2 = 1$ è:

     $$g_2 = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_2 I - F) = 3 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & -1 & -1\\ 0 & 1/2 & -1/2\\ 0 & -1/2 & 1/2\end{bmatrix} = 1.$$

     La forma di Jordan di F_J presenta un solo miniblocco relativo all'autovalore $\lambda_2 = 1$ ed è quindi pari a (a meno di permutazioni dei miniblocchi):

     $$F_J = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

     I modi elementari del sistema sono 1 (limitato), t (divergente) e $\delta(t)$ (convergente, in tempo finito).

- Caso $\alpha \neq \{0, 1/2\}$. In questo caso F è diagonalizzabile e quindi ha forma di Jordan (a meno di permutazioni degli elementi sulla diagonale):

$$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}.$$

  I modi elementari del sistema sono 1 (limitato), $\delta(t)$ (convergente, in tempo finito) e $(2\alpha)^t$ (convergente se $|\alpha| < 1/2$, divergente se $|\alpha| > 1/2$).

2. Da un calcolo diretto, la matrice di raggiungibilità del sistema risulta essere

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1+2\alpha \\ 0 & \alpha & 2\alpha^2 \\ 1 & \alpha & 2\alpha^2 \end{bmatrix}.$$

   Il determinante di $\mathcal{R}$ è

$$\det(\mathcal{R}) = -\alpha,$$

   il quale si annulla se e solo se $\alpha = 0$. Concludiamo quindi che il sistema è raggiungibile se e solo se $\alpha \neq 0$. Da questo fatto segue immediatamente che, per $\alpha \neq 0$, il massimo spazio raggiungibile è $X_R = \mathbb{R}^3$. Mentre, per $\alpha = 0$, abbiamo

$$X_R = \mathrm{Im}(\mathcal{R}) = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3. Come prima cosa osserviamo che la sequenza di ingresso richiesta esiste sicuramente perché, come verificato al punto precedente, il sistema è raggiungibile per $\alpha = 1/2$. Inoltre, il numero di passi minimo è sicuramente minore o uguale a $t = 3$, essendo il sistema di dimensione $n = 3$. Per trovare il numero di passi minimo calcoliamo gli spazi di raggiungibilità in $t = 1, 2$ passi:

$$X_R(1) = \mathrm{Im}(\mathcal{R}_1) = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad X_R(2) = \mathrm{Im}(\mathcal{R}_2) = \mathrm{Im} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix} = \mathrm{span} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

   Abbiamo che $x_\mathrm{f} \notin X_R(1)$, $x_\mathrm{f} \in X_R(2)$. Quindi il numero minimo di passi è $t = 2$. Per calcolare la sequenza di controllo desiderata basta risolvere il seguente sistema di equazioni nelle incognite $u(0)$, $u(1)$:

$$x_\mathrm{f} = \mathcal{R}_2 \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} \implies \begin{cases} u(0) = 4 \\ \frac{1}{2}u(0) = 2 \\ \frac{1}{2}u(0) + u(1) = 0 \end{cases},$$

   che ha soluzione $u(0) = 4$, $u(1) = -2$.

Esercizio 3 [9 pti].

1. La matrice di raggiungibilità del sistema è

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

la quale ha rango pieno, perciò il sistema è raggiungibile e, di conseguenza, stabilizzabile. La matrice di osservabilità del sistema è

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix},$$

che ha rango 2, perciò il sistema non è osservabile. Infine, osserviamo che gli autovalori di F sono -1, -2, -3 (elementi sulla diagonale di F). Essi hanno tutti parte reale negativa, per cui il sistema è rivelabile.

2. L'esistenza del controllore richiesto è garantita dal fatto che il sistema è raggiungibile. Sia $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$ la matrice del guadagno statico del controllore. Per calcolare il controllore richiesto usiamo il metodo di calcolo diretto osservando che, affinchè il sistema retroazionato abbia modi e^{-t}, te^{-t}, $\frac{t^2}{2}e^{-t}$, la matrice $F + GK$ deve avere tutti gli autovalori in -1. Imponiamo quindi

$$\begin{aligned} &\det(\lambda I - F - GK) \overset{!}{=} (\lambda+1)^3 \\ \Longrightarrow\ &\lambda^3 + (6-k_1)\lambda^2 + (11-5k_1-k_2)\lambda + (6-6k_1-3k_2-k_3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 \end{aligned}$$

da cui otteniamo il seguente sistema di equazioni nelle incognite k_1, k_2, k_3:

$$\begin{cases} 6 - k_1 = 3 \\ 11 - 5k_1 - k_2 = 3 \\ 6 - 6k_1 - 3k_2 - k_3 = 1 \end{cases}$$

che ha come soluzione $k_1 = 3$, $k_2 = -7$, $k_3 = 8$. Concludiamo quindi che controllore richiesto ha guadagno $K = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 8 \end{bmatrix}$.

3. Come prima cosa verifichiamo l'esistenza dello stimatore richiesto. Sia

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \\ \ell_{31} & \ell_{32} \end{bmatrix}$$

la matrice del guadagno dello stimatore. Affinchè l'errore di stima tenda a zero come una combinazione lineare di modi esponenziali $e^{-c_i t}$ con $c_i \in \mathbb{R}$ e $c_i \geq 2$ gli autovalori di $F + LH$ devono essere contenuti nell'intervallo $(-\infty, -2]$. Bisogna quindi verificare che F non abbia autovalori non osservabili in $(-2, +\infty)$. A questo scopo osserviamo che il sistema è in forma standard di osservabilità

$$F = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & 0 \\ \hline F_{21} & F_{22} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 1 & -3 \end{array}\right], \qquad H = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right],$$

con (F_{11}, H_1) corrispondente al sottosistema osservabile. L'unico autovalore non osservabile è quindi $F_{22} = -3$ e lo stimatore desiderato esiste. Per calcolare il guadagno è sufficiente considerare il solo sottosistema osservabile, imponendo che gli autovalori λ_1, λ_2 di $F_{11} + L_1 H_1$, $L_1 := \left[\begin{smallmatrix} \ell_{11} & \ell_{12} \\ \ell_{21} & \ell_{22} \end{smallmatrix}\right]$, siano minori o uguali a -2. Possiamo scegliere, ad esempio, $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. È quindi facile verificare per ispezione diretta della matrice $F + LH$ che

$$L = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ \ell_{21} & -1 \\ \ell_{31} & \ell_{32} \end{bmatrix}$$

con ℓ_{21}, ℓ_{31}, ℓ_{32} numeri reali qualsiasi, è un possibile guadagno che soddisfa le specifiche richieste.