Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 29/01/2021

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina moodle del corso. Tempo a disposizione: 2 h.*

Esercizio 1 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= (x_1(t) + x_2(t)) \sin(x_1(t)) - (3-\alpha)x_2(t) \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema **nei due casi $\boldsymbol{\alpha = 0}$ e $\boldsymbol{\alpha = 1}$**.
2. Studiare la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. (cioè per $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$) utilizzando la linearizzazione.
3. **Solo per il caso $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, studiare la stabilità degli equilibri del sistema tramite il Teorema di Lyapunov (ed, eventualmente, Krasowskii) usando come candidata funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 2 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Dire se il sistema è raggiungibile e determinare il massimo spazio raggiungibile al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 1/2}$**, calcolare, se possibile, una sequenza di ingresso in grado di portare il sistema dallo stato iniziale $x_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ allo stato finale $x_\mathrm{f} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}^\top$ nel **minor numero di passi possibile**.

Esercizio 3 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Dire se il sistema è: (i) raggiungibile, (ii) stabilizzabile, (iii) osservabile, (iv) rivelabile.
2. Calcolare, se possibile, un controllore in retroazione dallo stato in modo che il sistema retroazionato abbia come modi elementari e^{-t}, te^{-t}, $\frac{t^2}{2}e^{-t}$.
3. Calcolare, se possibile, uno stimatore in catena chiusa dello stato in modo che l'errore di stima tenda a zero come una combinazione lineare di **modi esponenziali $\boldsymbol{e^{-c_i t}}$ con $\boldsymbol{c_i \in \mathbb{R}}$, $\boldsymbol{c_i \geq 2}$**.