Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 21/06/2021

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.*

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 2-\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 2}$**, calcolare, se esiste, una sequenza di ingresso $u(0)$, $u(1)$, $u(2)$ tale da portare lo stato del sistema da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$ a $x(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$.
3. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, determinare **tutte e sole** le condizioni iniziali $x(0) \in \mathbb{R}^3$ che generano un'evoluzione libera dello stato del sistema **divergente** nel tempo.

Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Al variare di $\boldsymbol{\alpha \neq 0}$**, studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati al punto 1. utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Per gli eventuali **casi critici** della linearizzazione del punto 2., studiare la stabilità degli equilibri usando la candidata funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ e i teoremi di Lyapunov e, se necessario, Krasowskii.

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è (i) stabilizzabile e (ii) rivelabile.
2. Costruire, se possibile, un controllore in retroazione dallo stato in grado di allocare gli autovalori della matrice di stato del sistema retroazionato **tutti in $\boldsymbol{-1}$**.
3. Costruire, se possibile, uno stimatore dello stato in catena chiusa la cui dinamica dell'errore di stima abbia modi elementari **tutti limitati** nel tempo.