Nome e Cognome: ______________________ **N. Matricola**: ____________

È uno studente lavoratore? ☐ SI ☐ NO

Ha seguito il corso in questo A.A. (2019/20)? ☐ SI ☐ NO, l'ho seguito nell'A.A. ________

Si è iscritto regolarmente su Uniweb a questo esame? ☐ SI ☐ NO, perché ____________

Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2019/2020
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 29/01/2020

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Tempo a disposizione: 2 h 30 min.*

Esercizio 1 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \alpha x_1(t) - x_1^3(t) - x_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1^2(t) + \alpha x_2(t) \end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Studiare la stabilità **dell'equilibrio nell'origine** al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ utilizzando la linearizzazione.
3. Per i casi critici del punto 2 (se ne esistono), studiare la stabilità **dell'equilibrio nell'origine** utilizzando il Teorema di Lyapunov (ed, eventualmente, Krasowskii) e la seguente funzione candidata di Lyapunov $V(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 2 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 1}$**, dire se il sistema è raggiungibile e determinare gli spazi raggiungibili in t passi, per ogni $t \geq 1$.
3. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 1}$**, determinare, se possibile, un controllore in retroazione dallo stato tale per cui la matrice di stato del sistema retroazionato abbia tutti gli autovalori in $\frac{1}{2}$.

Esercizio 3 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & (1-\alpha)^2 \\ 0 & \alpha^2 & 0 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema risulta (i) osservabile e (ii) ricostruibile.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 1}$**, sapendo che in corrispondenza all'ingresso $u(0) = 1$, $u(1) = 2$, i valori dell'uscita sono $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $y(2) = 4$, determinare, se possibile, lo stato iniziale $x(0)$ del sistema.
3. Determinare, giustificando la risposta, i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ (se ne esistono) tali per cui il sistema ammette uno stimatore dead-beat dello stato che porta a zero l'errore di stima **nel minor numero possibile di passi**.

Domanda di Teoria [6 pti]. Si consideri un sistema lineare tempo invariante a tempo discreto:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t), \quad F \in \mathbb{R}^{n\times n}, G \in \mathbb{R}^{n\times m}.$$

1. Si assuma che il sistema sia raggiungibile in $\bar{t}$ passi. Si derivi (riportando i passaggi) l'ingresso a minima energia che porta lo stato del sistema da $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ a $x(\bar{t}) = x_\mathrm{f} \in \mathbb{R}^n$.
2. Siano $F = 1$, $G = 1$, e $\bar{t} = 2$. Si riporti, giustificando la risposta, l'espressione di **tutti i possibili ingressi** che portano lo stato da $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$ a $x(\bar{t}) = x(2) = x_\mathrm{f} \in \mathbb{R}$.

Parte riservata al docente (NON compilare!)

	Parte 1	Parte 2	Parte 3	**Totale**
Esercizio 1				___ / 9
Esercizio 2				___ / 9
Esercizio 3				___ / 9
Domanda di Teoria				___ / 6
Punteggio Finale				___ / **33**

Commenti: ____

____

____

____