Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 17/01/2022: **Soluzioni**

Esercizio 1 [4 pti].

1. La matrice F è 3×3, quindi per calcolare la forma di Jordan di F è sufficiente calcolare gli autovalori di F e le molteplicità algebriche/geometriche di questi autovalori.

   (i) Calcolo autovalori di F: F è triangolare a blocchi con il primo blocco diagonale 2×2

$$F_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   con autovalori ± 1 e il secondo blocco diagonale scalare $F_{22} = -1 + \alpha$. Gli autovalori di F sono quindi: $\lambda(F) = \{\pm 1, -1 + \alpha\}$. Possiamo distinguere i casi:

   - $\alpha = 0$: F ha un due autovalori, uno in $\lambda_1 = -1$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 2$ e molteplicità geometrica g_1 da calcolare e l'altro in $\lambda_1 = 1$ con $\nu_2 = g_2 = 1$.
   - $\alpha = 2$: F ha un due autovalori, uno in $\lambda_1 = -1$ con $\nu_1 = g_1 = 1$ e l'altro in $\lambda_1 = 1$ con $\nu_2 = 1$ e molteplicità geometrica g_2 da calcolare.
   - $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$: F ha tre autovalori distinti $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1 + \alpha$, con $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$ e $g_1 = g_2 = g_3 = 1$.

   (ii) Calcolo molteplicità geometriche degli autovalori di F: Le molteplicità geometriche mancanti sono date da:

   - $\alpha = 0$: $g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$
   - $\alpha = 2$: $g_2 = 3 - \text{rank}(\lambda_2 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$

   (iii) Calcolo della forma di Jordan di F e dei modi elementari del sistema: Utilizzando le informazioni trovate ai punti (i) e (ii), possiamo concludere:

   - $\alpha = 0$: La forma di Jordan di F è (a meno di una permutazione degli elementi diagonali):

$$F_J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

     I modi elementari sono: $(-1)^t$ e 1 (entrambi limitati).

   - $\alpha = 2$: La forma di Jordan di F è (a meno di una permutazione dei blocchi diagonali):

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

     I modi elementari sono: $(-1)^t$ (limitato), 1 (limitato), t (divergente).

   - $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$: La matrice è diagonalizzabile e quindi forma di Jordan di F è (a meno di una permutazione degli elementi diagonali):

$$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + \alpha \end{bmatrix}.$$

     I modi elementari sono: $(-1)^t$ (limitato), 1 (limitato), $(-1 + \alpha)^t$ (divergente per $\alpha < 0$, $\alpha > 2$ e convergente per $0 < \alpha < 2$).

2. Per $\alpha = 0$ la matrice F diventa

$$F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Per verificare l'esistenza dell'ingresso desiderato dobbiamo verificare che

$$x(2) - F^2 x(0) \in X_R(2) = \operatorname{im}(\mathcal{R}_2) = \operatorname{im}(\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix}).$$

Dai dati del problema abbiamo

$$x(2) - F^2 x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_R(2) = \operatorname{im} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si conclude quindi che $x(2) - F^2 x(0) \in X_R(2)$ e l'ingresso desiderato esiste. Per il calcolo dell'ingresso è sufficiente risolvere il sistema di equazioni lineari $x(2) - F^2 x(0) = \mathcal{R}_2 u_2$, nell'incognita $u_2 = \begin{bmatrix} u(1) & u(0) \end{bmatrix}^\top$, che porge

$$\begin{cases} u(1) + u(0) = -1 \\ u(1) + u(0) = -1 \end{cases}$$

Ne segue che la sequenza di ingresso richiesta ha la forma $u(0) = \beta$, $u(1) = -1 - \beta$, dove $\beta \in \mathbb{R}$.

3. Partizionando le matrici F e G nella forma

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & 3 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 + \alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right], \quad G = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right]$$

e sfruttando la proprietà dell'inversa di matrici triangolari a blocchi, $\left[\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \left[\begin{smallmatrix} A^{-1} & \star \\ 0 & C^{-1} \end{smallmatrix}\right]$ quando i blocchi diagonali A, C sono invertibili, la matrice di trasferimento del sistema è calcolabile come

$$\begin{aligned} W(z) = (zI - F)^{-1} G &= \left[\begin{array}{c|c} zI - F_{11} & -F_{12} \\ \hline 0 & z - F_{22} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} (zI - F_{11})^{-1} & \star \\ \hline 0 & (z - F_{22})^{-1} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \\ &= \begin{bmatrix} (zI - F_{11})^{-1} G_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} z+2 & -3 \\ 1 & z-2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{z^2 - 1} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} z-2 & 3 \\ -1 & z+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{z^2 - 1} \begin{bmatrix} z+1 \\ z+1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{z-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esercizio 2 [4 pti].

1. Per ingresso costante $u(t) = \bar{u} \in \mathbb{R}$, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è un punto di equilibrio del sistema se e solo se

$$\begin{cases} 0 = \bar{x}_1^2 + \bar{x}_1 + \bar{x}_2 - \bar{u} \\ 0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \end{cases} \tag{1}$$

La seconda equazione in (1) porge $\bar{x}_2 = -\bar{x}_1$, che sostituita nella prima porge a sua volta $\bar{x}_1^2 = \bar{u}$. Da queste due equazioni si conclude che

(i) il sistema non ammette equilibri se $\bar{u} < 0$,

(ii) il sistema ammette un unico equilibrio nell'origine $\bar{x} = (0, 0)$ se $\bar{u} = 0$,

(iii) il sistema ammette due equilibri distinti $\bar{x}^{(1)} = (+\sqrt{\bar{u}}, -\sqrt{\bar{u}})$, $\bar{x}^{(2)} = (-\sqrt{\bar{u}}, +\sqrt{\bar{u}})$ se $\bar{u} > 0$.

2. In corrispondenza dell'ingresso nullo $u(t) = \bar{u} = 0$, dal punto precedente segue che l'unico equilibrio del sistema è l'origine $\bar{x} = (0, 0)$. La matrice Jacobiana del sistema è

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

che valutata in $\bar{x} = (0, 0)$ porge

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di $J_f(\bar{x})$ sono 0 e 2. Per il teorema di linearizzazione concludiamo che $\bar{x}$ è un equilibrio instabile per la presenza di un autovalore strettamente positivo.

3. Preso l'ingresso $u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)$, k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$, il sistema diventa

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + (1 - k_1)x_1(t) + (1 - k_2)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

La matrice Jacobiana del sistema valutata nell'origine $\bar{x} = (0, 0)$ è

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} 1 - k_1 & 1 - k_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Per il teorema di linearizzazione se $J_f(\bar{x})$ ha entrambi gli autovalori a parte reale strettamente negativa allora $\bar{x} = (0, 0)$ è asintoticamente stabile. Per capire se esistono valori di k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ tali per cui gli autovalori di $J_f(\bar{x})$ hanno parte reale strettamente negativa, calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$\Delta_{J_f(\bar{x})}(\lambda) = \det(\lambda I - J_f(\bar{x})) = \lambda^2 + (k_1 - 2)\lambda + k_2 - k_1.$$

Per la regola dei segni di Cartesio le radici di $\Delta_{J_f(\bar{x})}(\lambda)$ hanno parte reale strettamente negativa se tutti i segni dei coefficienti di $\Delta_{J_f(\bar{x})}(\lambda)$ sono positivi, cioè quando $k_2 > k_1 > 2$. Concludiamo quindi che l'origine del sistema è asintoticamente stabile per una qualsiasi scelta di k_1, $k_2 \in \mathbb{R}$ tale da soddisfare $k_2 > k_1 > 2$.

Esercizio 3 [4 pti].

1. Per studiare la stabilizzabilità del sistema si può osservare che le matrici F e G possono essere partizionate come

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \alpha \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right], \quad G = \left[\begin{array}{c} \alpha \\ 0 \\ \hline 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right].$$

Per $\alpha \neq 0$ la coppia (F_{11}, G_1) è raggiungibile e il sistema è in forma di Kalman di raggiungibilità. L'unico autovalore non raggiungibile è quindi $F_{22} = \alpha$ che ha è strettamente negativo solo se $\alpha < 0$. Per $\alpha = 0$ abbiamo $G = 0$ e gli autovalori non raggiungibili coincidono con gli autovalori di F, alcuni dei quali hanno parte reale maggiore o uguale a zero. Concludiamo quindi che il sistema è stabilizzabile per $\alpha < 0$.

Per studiare la rivelabilità, si può osservare che se $\alpha \neq 0$ il sistema è osservabile in quanto $\text{rank}(H) = 3$ e quindi anche rivelabile. Per $\alpha = 0$, partizionando le matrici F e H come

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right], \quad H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \end{array}\right].$$

abbiamo che (F_{11}, H_1) è osservabile e quindi il sistema è forma di Kalman di osservabilità. In questo caso $F_{22} = 0$ rappresenta l'autovalore non osservabile. Concludiamo quindi che il sistema è rivelabile per $\alpha \neq 0$.

2. Per $\alpha = -2$ dal punto 1. sappiamo che il sistema non è raggiungibile. Tuttavia poiché il solo autovalore non raggiungibile del sistema è in -2 e e^{-2t} è tra i modi desiderati, il controllore richiesto esiste. Per il calcolo della matrice di retroazione $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$, possiamo usare il "metodo diretto" applicato al solo sottosistema raggiungibile partizionando $K = \left[\begin{array}{cc|c} k_1 & k_2 & k_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} K_1 & K_2 \end{array}\right]$ e imponendo

$$\Delta_{F_{11}+G_1K_1}(\lambda) \stackrel{!}{=} (\lambda+1)(\lambda+3) = \lambda^2 + 4\lambda + 3.$$

Dopo qualche conto otteniamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} 2k_1 = 4 \\ -1 - 2k_1 - 4k_2 = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} k_1 = 2, \\ k_2 = 0. \end{cases}$$

Concludiamo quindi che la matrice di retroazione del controllore desiderato è della forma $K = \begin{bmatrix} 2 & 0 & k_3 \end{bmatrix}$ con $k_3 \in \mathbb{R}$.

3. Per $\alpha = 0$ le matrici F e H diventano

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right], \quad H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \end{array}\right].$$

Affinché la dinamica dell'errore di stima abbia il modo elementare $\sin(2t)$ la matrice $F + LH$, con $L \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ guadagno dello stimatore, deve avere due autovalori complessi coniugati in $\pm 2i$. Dal punto 1. sappiamo che il sistema ha un solo autovalore non osservabile quindi lo stimatore richiesto esiste. Partizionando il guadagno dello stimatore conformemente a F e H

$$L = \left[\begin{array}{ccc} \ell_{11} & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & \ell_{22} & \ell_{23} \\ \hline \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} L_1 \\ \hline L_2 \end{array}\right]$$

per soddisfare la richiesta del problema imponiamo

$$\Delta_{F_{11}+L_1H_1}(\lambda) = \det(\lambda I - F_{11} - L_1H_1) = (\lambda - 1 - \ell_{11})(\lambda + 1 - \ell_{22}) - \ell_{12}\ell_{21} \stackrel{!}{=} \lambda + 4.$$

In questo caso, eguagliando i coefficienti dei polinomi si ottiene un sistema di equazioni non lineari, tuttavia non è difficile rendersi conto che la scelta $\ell_{11} = -1$, $\ell_{22} = 1$, ℓ_{12}, $\ell_{21} \in \mathbb{R}$ tali che $\ell_{12}\ell_{21} = -4$ (ad es. $\ell_{12} = 2$, $\ell_{21} = -2$) è sempre una soluzione. Concludiamo quindi che dei guadagni dello stimatore che soddisfano la richiesta sono

$$L = \begin{bmatrix} -1 & \ell_{12} & \ell_{13} \\ \ell_{21} & 1 & \ell_{23} \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} \end{bmatrix}$$

con ℓ_{12}, $\ell_{21} \in \mathbb{R}$ tali che $\ell_{12}\ell_{21} = -4$ e ℓ_{13}, ℓ_{23}, ℓ_{31}, ℓ_{32}, $\ell_{33} \in \mathbb{R}$ numeri reali arbitrari.