Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 17/01/2022

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri o quaderni, né l'uso di calcolatrici programmabili. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Tempo a disposizione: 2 h.*

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix} -2 & 3 & \alpha \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1+\alpha \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, calcolare se esiste una sequenza di ingresso $u(0), u(1)$ in grado di portare lo stato del sistema da $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ a $x(2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^\top$.
3. **Presa come uscita lo stato del sistema** ($y(t) = x(t)$), calcolare la matrice di trasferimento $W(z)$ del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) + x_1(t) + x_2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

1. Assumendo di avere un **ingresso costante $\boldsymbol{u(t) = \bar{u}}$**, $\forall t \geq 0$, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\bar{u} \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\bar{u} = 0}$**, studiare la stabilità dei punti di equilibrio trovati al punto precedente utilizzando il teorema di linearizzazione.
3. Assumendo che l'ingresso sia dato dalla **legge di controllo $\boldsymbol{u(t) = k_1 x_1(t) + k_2 x_2(t)}$**, determinare, se possibile, dei valori di $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ tali da rendere l'origine del sistema asintoticamente stabile.

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema è: (i) stabilizzabile, (ii) rivelabile.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = -2}$**, costruire, se possibile, una retroazione statica dallo stato del sistema in modo che il sistema retroazionato abbia modi elementari e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}.
3. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, costruire, se possibile, uno stimatore dello stato in catena chiusa in modo che la dinamica dell'errore di stima abbia $\sin(2t)$ tra i modi elementari.