Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2019/2020
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 10/09/2020

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina moodle del corso. Tempo a disposizione: 2 h.*

Esercizio 1 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \alpha^2 x_1(t) + \beta x_2(t) \\ x_2(t+1) &= -x_1^2(t) - \alpha x_2(t) \end{aligned} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

1. **Fissato $\boldsymbol{\beta = 0}$**, determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\beta = 0}$**, studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la stabilità degli equilibri trovati al punto 1. utilizzando la linearizzazione.
3. **Fissati $\boldsymbol{\alpha = 0}$ e $\boldsymbol{\beta = 1}$**, studiare la stabilità **dell'equilibrio nell'origine** tramite il Teorema di Lyapunov e, se necessario, Krasowskii usando come candidata funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Esercizio 2 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H \in \mathbb{R}^{3\times 1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Determinare la raggiungibilità e la stabilizzabilità del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = -1}$**, calcolare, se possibile, una matrice di uscita $H \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ tale per cui il sistema risulti **rivelabile ma non osservabile**.

Esercizio 3 [9 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) \end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

1. Determinare, se possibile, un controllore in retroazione dallo stato del sistema di tipo **dead-beat**.
2. Determinare, se possibile, un regolatore del sistema di tipo **dead-beat**.
3. Calcolare la funzione di trasferimento del sistema.