Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 05/07/2021: **Soluzioni**

Esercizio 1 [4 pti].

1. La matrice F è 3×3, quindi per calcolare la forma di Jordan di F è sufficiente calcolare gli autovalori di F e le molteplicità algebriche/geometriche di questi autovalori.

   (i) Calcolo autovalori di F: F è triangolare quindi gli autovalori di F sono gli elementi sulla diagonale di F: $\lambda(F) = \{\alpha, 1-\alpha, 1\}$. Distinguiamo ora i casi:

   - $\alpha = 0$: gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 2$ e molteplicità geometrica da calcolare, $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica e geometrica $\nu_2 = g_2 = 1$.
   - $\alpha = 1$: gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 2$ e molteplicità geometrica da calcolare, $\lambda_2 = 0$ con molteplicità algebrica e geometrica $\nu_2 = g_2 = 1$.
   - $\alpha = 1/2$: gli autovalori di F sono $\lambda_1 = 1$ con molteplicità algebrica e geometrica $\nu_1 = g_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$ con molteplicità algebrica $\nu_2 = 2$ e molteplicità geometrica da calcolare.
   - $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1/2, 1\}$: gli autovalori di F sono $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 1-\alpha$, $\lambda_3 = 1$, tutti con molteplicità algebrica e geometrica pari a uno, $\nu_i = g_i = 1$, $i = 1, 2, 3$.

   (ii) Calcolo molteplicità geometriche degli autovalori di F: Le molteplicità geometriche mancanti sono date da:

   - $\alpha = 0$: $g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$
   - $\alpha = 1$: $g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$
   - $\alpha = 1/2$: $g_2 = 3 - \text{rank}(\lambda_2 I - F) = 3 - \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$

   (iii) Calcolo della forma di Jordan di F, modi elementari del sistema e loro carattere: Utilizzando le informazioni trovate ai punti (i) e (ii), possiamo concludere:

   - $\alpha = 0, 1$: La forma di Jordan di F è (a meno di una permutazione dei blocchi diagonali):
   $$F_J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
   I modi elementari sono: 1 (limitato), e^t, te^t (divergenti).
   - $\alpha = 1/2$: La forma di Jordan di F è (a meno di una permutazione dei blocchi diagonali):
   $$F_J = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   I modi elementari sono: $e^{\frac{1}{2}t}$, $te^{\frac{1}{2}}$, e^t (tutti divergenti). (Notare che, in questo caso, $F = F_J$.)
   - $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1/2, 1\}$: La matrice è diagonalizzabile e quindi forma di Jordan di F è (a meno di una permutazione degli elementi diagonali):
   $$F_J = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1-\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
   I modi elementari sono: $e^{\alpha t}$ (convergente se $\alpha < 0$, divergente se $\alpha > 0$), $e^{(1-\alpha)t}$ (convergente se $\alpha > 1$, divergente se $\alpha < 1$), e^t (divergente).

2. Per $\alpha = 1/2$, la matrice F diventa

$$F = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice F è in forma di Jordan, quindi e^{Ft} si calcola in maniera diretta come

$$e^{Ft} = \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & te^{\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}.$$

Utilizzando la forma e^{Ft} appena trovata, l'evoluzione libera dell'uscita con condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^\top$ è data da

$$y_\ell(t) = He^{Ft}x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\frac{1}{2}t} & te^{\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{\frac{1}{2}t} \\ e^{\frac{1}{2}t} \end{bmatrix}.$$

3. Per $\alpha = 1$, la matrice F può essere partizionata come

$$F = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} F_{11} & F_{12} \\ \hline 0 & F_{22} \end{array}\right].$$

Partizionando G e H in maniera conforme ad F

$$G = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right], \quad H = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \end{array}\right],$$

il calcolo di $W(s)$ si può semplificare come

$$\begin{aligned} W(s) = H(sI - F)^{-1}G &= \left[\begin{array}{c|c} H_1 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|c} sI - F_{11} & -F_{12} \\ \hline 0 & sI - F_{22} \end{array}\right]^{-1} \left[\begin{array}{c} G_1 \\ \hline 0 \end{array}\right] \\ &= H_1(sI - F_{11})^{-1}G_1 = \begin{bmatrix} s-1 & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-1} & \frac{1}{s(s-1)} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

dove si è sfruttato il fatto che l'inversa di una matrice triangolare a blocchi A è ancora triangolare a blocchi con blocchi diagonali uguali alle inverse dei blocchi diagonali di A.

Esercizio 2 [4 pti].

1. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è un punto di equilibrio del sistema se e solo se

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \alpha \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 = (1 - \alpha^2)\bar{x}_1^2 \end{cases} \tag{1}$$

Distinguiamo i casi:

(a) $\underline{\alpha = 1}$: la prima equazione in (1) non porge nessun vincolo, mentre dalla seconda equazione in (1) abbiamo $\bar{x}_2 = 0$. Quindi gli equilibri sono infiniti e della forma $\bar{x} = (\gamma, 0)$, con $\gamma \in \mathbb{R}$.

(b) $\underline{\alpha \neq 1}$: la prima equazione in (1) porge $\bar{x}_1 = 0$ e, sostituendo nella seconda, si conclude che esiste un unico equilibrio nell'origine $\bar{x} = (0, 0)$.

2. La matrice Jacobiana del sistema è:

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 2(1-\alpha^2)\bar{x}_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Valutando la matrice Jacobiana nel punto di equilibrio $\bar{x} = (0,0)$, otteniamo:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di questa matrice sono α e 0. Per il teorema di linearizzazione concludiamo quindi che $\bar{x}$ è asintoticamente stabile se $|\alpha| < 1$ e instabile se $|\alpha| > 1$. Per $\alpha = \pm 1$, siamo nel caso critico del teorema.

3. I casi critici della linearizzazione del punto 2. riguardano l'equilibrio $\bar{x} = (0,0)$ e i valori $\alpha = \pm 1$. Osserviamo innanzitutto che $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ è una funzione definita positiva in un intorno di $\bar{x}$. Calcoliamo quindi $\Delta V(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \Delta V(x_1, x_2) &= V(x_1(t+1), x_2(t+1)) - V(x_1(t), x_2(t)) \\ &= \alpha^2 x_1^2 + (1-\alpha^2)^2 x_1^4 - x_1^2 - x_2^2 \overset{\alpha=\pm 1}{=} -x_2^2. \end{aligned}$$

Per $\alpha = \pm 1$, $\Delta V(x_1, x_2)$ è quindi semidefinita negativa, ma non definita negativa in un intorno di $\bar{x}$. Per il teorema di Lyapunov, concludiamo che $\bar{x} = (0,0)$ è (almeno) semplicemente stabile se $\alpha \pm 1$. Verifichiamo ora se abbiamo solo stabilità semplice oppure anche stabilità asintotica, usando il teorema di Krasowskii. Abbiamo

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) \,:\, \dot{V}(x_1, x_2) = 0)\} = \{(x_1, x_2) \,:\, x_1 \in \mathbb{R},\, x_2 = 0\}.$$

Affinché una traiettoria $x(t) = (x_1(t), x_2(t)))$ sia interamente contenuta in $\mathcal{N}$, deve essere $x_2(t) = 0$ per ogni t, il che implica $x_2(t+1) = 0$ per ogni t. Sostituendo questa condizione nelle equazioni della dinamica:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Da queste equazioni concludiamo che per ogni scelta di un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ esistono traiettorie diverse da $\bar{x}$ interamente contenute in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$ della forma $x_1(t) = x_1(0) \neq 0$, $x_2(t) = 0$, $x(0) \in \mathcal{I}$. Quindi, per Krasowskii, $\bar{x}$ è solo semplicemente stabile se $\alpha = \pm 1$.

La conclusione è anche confermata dal fatto che per $\alpha = \pm 1$ il sistema è in effetti un sistema lineare semplicemente stabile.

Esercizio 3 [4 pti].

1. Per studiare la raggiungibilità e controllabilità del sistema possiamo utilizzare, ad esempio, il test PBH. Essendo F triangolare a blocchi, con il secondo blocco diagonale a sua volta triangolare, gli autovalori di F sono gli elementi sulla diagonale, $\lambda(F) = \{0, \alpha, 4\}$. Con questa informazione, possiamo ora applicare il test PBH di raggiungibilità, valutando il rango delle matrici PBH valutate negli autovalori di F. Partiamo con il primo autovalore $\lambda = 0$:

$$\operatorname{rank}\,[\lambda I - F \quad G] = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} = 2 \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Poichè il rango della matrice PBH non è pieno in corrispondenza dell'autovalore 0 possiamo già concludere che il sistema non è raggiungibile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Per verificare la controllabilità, proseguiamo col valutare il rango della matrice PBH nei rimanenti autovalori non nulli di F. Distinguiamo i due casi

- $\underline{\alpha = 0}$: Abbiamo un solo autovalore non nullo $\lambda = 4$ con

$$\operatorname{rank}[\lambda I - F \quad G] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

- $\underline{\alpha \neq 0}$: Abbiamo due autovalori non nulli $\lambda_1 = \alpha$, $\lambda_2 = 4$ con

$$\operatorname{rank}[\lambda_1 I - F \quad G] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} \alpha & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \alpha - 4 & 0 \end{bmatrix} = 3,$$

$$\operatorname{rank}[\lambda_2 I - F \quad G] = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4-\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Concludiamo quindi che il sistema è controllabile per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Fissato $\alpha = 0$, gli spazi raggiungibili sono dati da:

$$X_R(1) = \operatorname{im} G = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

$$X_R(2) = \operatorname{im}\begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\},$$

$$X_R(3) = \operatorname{im}\begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \operatorname{im}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} = X_R(t), \quad t \geq 3.$$

Fissato $\alpha = 0$, gli spazi controllabili sono dati da:

$$X_C(1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \, : \, Fx \in X_R(1) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \begin{bmatrix} x_2 - 2x_3 \\ 0 \\ -2x_2 + 4x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$X_C(2) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \, : \, F^2x \in X_R(2) \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \, : \, \begin{bmatrix} 4x_2 - 8x_3 \\ 0 \\ -8x_2 + 16x_3 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^3 = X_C(t), \quad t \geq 2.$$

Da questi conti, segue che il sistema è controllabile in $t = 2$ passi.

3. Come prima cosa osserviamo che per $\alpha = 0$ il sistema risulta controllabile, il che implica l'esistenza di un controllore dead-beat. Per il calcolo del controllore possiamo usare il "metodo diretto". Sia $p(\lambda) = \lambda^3$ il polinomio caratteristico desiderato e $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$, con $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$. Imponendo

$$\Delta_{F+GK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GK) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 2 \\ -k_1 & \lambda - k_2 & -k_3 \\ 0 & 2 & \lambda - 4 \end{bmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda - k_2)(\lambda - 4) - 4k_1 - k_1(\lambda - 4) + 2k_3\lambda$$

$$= \lambda^3 + (-4 - k_2)\lambda + (4k_2 - k_1 + 2k_3)\lambda \stackrel{!}{=} \lambda^3,$$

otteniamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} -4 - k_2 = 0 \\ 4k_2 - k_1 + 2k_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k_2 = -4 \\ k_3 = \frac{k_1}{2} + 8 \end{cases}$$

Da questo segue che i controllori dead-beat hanno matrice di retroazione della forma:

$$K = \begin{bmatrix} \gamma & -4 & \frac{\gamma}{2} + 8 \end{bmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Notiamo infine che la matrice di stato del sistema retroazionato con i controllori dead-beat trovati è:

$$F + GK = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \gamma & -4 & \frac{\gamma}{2} + 8 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Per costruzione, questa matrice ha un unico autovalore $\lambda_1 = 0$, con molteplicità algebrica $\nu_1 = 3$. La molteplicità geometrica di $\lambda_1 = 0$ si può calcolare come:

$$g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F - GK) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -\gamma & 4 & -\frac{\gamma}{2} - 8 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } \gamma = 0, \\ 1 & \text{se } \gamma \neq 0. \end{cases}$$

Quindi la forma di Jordan di $F + GK$ avrà un unico miniblocco relativo a $\lambda_1 = 0$ se $\gamma \neq 0$ e due miniblocchi relativi a $\lambda_1 = 0$ se $\gamma = 0$. Concludiamo quindi che lo stato del sistema retroazionato viene portato a zero in 3 passi se $\gamma \neq 0$ e in 2 passi se $\gamma = 0$.

N.B. Per risolvere questo punto era sufficiente indicare un solo controllore dead-beat (per un γ fissato) ed il relativo numero di passi necessario per portare a zero lo stato del sistema retroazionato.