Laurea Magistrale in Ingegneria Meccatronica A.A. 2020/2021
Teoria dei Sistemi e Controllo Ottimo e Adattativo (C. I.)

Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 05/07/2021

Istruzioni. *Non è ammessa la consultazione di libri, quaderni o qualsiasi tipo di materiale in formato digitale, né l'uso di calcolatrici programmabili, ricerche web e software di calcolo. È inoltre vietato allontanarsi dalla propria postazione o oscurare il video. Scrivere in modo chiaro e ordinato, motivare ogni risposta e fornire traccia dei calcoli. Per la consegna dell'elaborato, scansionare i fogli di bella copia (controllando la leggibilità del risultato della scansione) e caricare i file nell'apposita sezione della pagina di Moodle esami. Tempo a disposizione: 2 h.*

Esercizio 1 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **continuo**:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Fx(t) + Gu(t)\\ y(t) &= Hx(t)\end{aligned} \qquad F = \begin{bmatrix}\alpha & 1 & 0\\ 0 & 1-\alpha & \frac{1}{2}-\alpha\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad G = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad H = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare la forma di Jordan di F, i modi elementari del sistema e il loro carattere al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 1/2}$**, determinare l'evoluzione libera dell'uscita del sistema ottenuta a partire dalla condizione iniziale $x(0) = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}^\top$.
3. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 1}$**, calcolare la matrice di trasferimento $W(s)$ del sistema.

Esercizio 2 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema non lineare a tempo **discreto**:

$$\begin{aligned}x_1(t+1) &= \alpha x_1(t)\\ x_2(t+1) &= (1-\alpha^2)x_1^2(t)\end{aligned} \qquad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Determinare i punti di equilibrio del sistema al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Studiare la stabilità **dell'equilibrio nell'origine** $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ utilizzando il teorema di linearizzazione al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Per gli eventuali **casi critici** della linearizzazione del punto 2., studiare la stabilità di $\bar{x} = (0, 0)$ usando la candidata funzione di Lyapunov $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ e i teoremi di Lyapunov e, se necessario, Krasowskii.

Esercizio 3 [4 pti]. Si consideri il seguente sistema lineare tempo invariante a tempo **discreto**:

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) \qquad F = \begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & \alpha & 0\\ 0 & -2 & 4\end{bmatrix},\quad G = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},\quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il sistema risulta (i) raggiungibile e (ii) controllabile.
2. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, calcolare (i) gli spazi raggiungibili in t passi del sistema, $X_R(t)$, per ogni $t \geq 1$ e (ii) gli spazi controllabili in t passi del sistema, $X_C(t)$, per ogni $t \geq 1$.
3. **Fissato $\boldsymbol{\alpha = 0}$**, costruire, se possibile, un controllore dead-beat del sistema. In **quanti passi** lo stato del sistema retroazionato viene portato a zero utilizzando il controllore dead-beat trovato?