Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 03/07/2020: **Soluzioni**

Esercizio 1 [9 pti].

1. Il vettore $\bar{x} = \begin{bmatrix}\bar{x}_1 & \bar{x}_2\end{bmatrix}^\top$ è un equilibrio del sistema se e solo se soddisfa

$$\begin{aligned} 0 &= (\bar{x}_1^2 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 + 2) \\ 0 &= \bar{x}_1 + \bar{x}_1\bar{x}_2 - \bar{x}_2 \end{aligned} \tag{1}$$

La prima equazione di (1) ha soluzioni i) $\bar{x}_1^2 = \bar{x}_2$ e ii) $\bar{x}_1 = -2$.

Nel caso i), sostituendo $\bar{x}_2 = \bar{x}_1^2$ nella seconda equazione di (1) otteniamo:

$$0 = \bar{x}_1 + \bar{x}_1^3 - \bar{x}_1^2 = \bar{x}_1(\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 + 1).$$

L'unica soluzione reale di questa equazione è $\bar{x}_1 = 0$. (Infatti, l'equazione di secondo grado $\bar{x}_1^2 - \bar{x}_1 + 1$ ha solo soluzioni immaginarie.) Concludiamo quindi che un primo equilibrio è l'origine $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\top$.

Nel caso ii), sostituendo $\bar{x}_1 = -2$ nella seconda equazione di (1) otteniamo:

$$0 = -2 - 3\bar{x}_2.$$

che porge la soluzione $\bar{x}_2 = -2/3$. Concludiamo quindi che un secondo equilibrio è $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix}-2 & -2/3\end{bmatrix}^\top$.

2. La matrice Jacobiana del sistema valutata in un generico $x = \begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}^\top$ è

$$J(x) = \begin{bmatrix} 3x_1^2 + 4x_1 - x_2 & -x_1 - 2 \\ 1 + x_2 & x_1 - 1 \end{bmatrix}.$$

Valutata nel primo punto di equilibrio $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\top$, la matrice Jacobiana diventa

$$J(\bar{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di $J(\bar{x}^{(1)})$ sono le radici di $\lambda^2 + \lambda + 2$, cioè $\lambda_{1,2} = -1/2 \pm +i\sqrt{7}/2$. Siccome entrambi gli autovalori hanno parte reale strettamente negativa, dal Teorema di Linearizzazione possiamo concludere che $\bar{x}^{(1)}$ è un punto di equilibrio asintoticamente stabile.

Valutata nel secondo punto di equilibrio $\bar{x}^{(2)} = \begin{bmatrix}-2 & -2/3\end{bmatrix}^\top$, la matrice Jacobiana diventa

$$J(\bar{x}^{(2)}) = \begin{bmatrix} 14/3 & 0 \\ 1/3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che un autovalore di $J(\bar{x}^{(2)})$ è positivo (in quanto coincide con il primo elemento sulla diagonale). Quindi dal Teorema di Linearizzazione possiamo concludere che $\bar{x}^{(2)}$ è un punto di equilibrio instabile.

3. L'unico equilibrio asintoticamente stabile è $\bar{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^\top$. Affinché $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2$ sia una funzione di Lyapunov del sistema rispetto a $\bar{x}^{(1)}$ bisogna verificare che:

   (a) $V(x_1, x_2)$ sia definita positiva in un intorno di $\bar{x}^{(1)}$, e

   (b) $\dot{V}(x_1, x_2)$ sia semidefinita negativa in un intorno di $\bar{x}^{(1)}$.

Osserviamo che $V(x_1, x_2) = (x_1 + x_2/2)^2$, da cui segue che $V(x_1, x_2) = 0$ per tutti gli x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $2x_1 = -x_2$. Quindi $V(x_1, x_2)$ non è definita positiva in un intorno di $\bar{x}^{(1)}$ e il requisito (a) non è soddisfatto. Concludiamo che $V(x_1, x_2)$ non è una funzione di Lyapunov del sistema rispetto a $\bar{x}^{(1)}$.

Esercizio 2 [9 pti].

1. La matrice F ha due autovalori in $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Inoltre, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la molteplicità algebrica e geometrica di λ_1 sono $\nu_1 = g_1 = 1$. La molteplicità algebrica di λ_2 è $\nu_2 = 2$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. La molteplicità geometrica di λ_2 invece è data da

$$g_2 = 3 - \operatorname{rank}(\lambda_2 I - F) = 3 - \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -\alpha \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 1, \\ 1 & \text{se } \alpha \neq 1. \end{cases}$$

   Distinguiamo quindi i due casi:

   - Caso $\alpha = 1$. In questo caso F è diagonalizzabile e la sua forma di Jordan è (a meno di permutazioni degli elementi sulla diagonale):
$$F_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
     I modi elementari del sistema sono 2^t (divergente) e $\delta(t)$ (convergente).
   - Caso $\alpha \neq 1$. In questo caso F non è diagonalizzabile, in quanto all'autovalore λ_2 è associato un miniblocco di Jordan di dimensione 2. La forma di Jordan di F è quindi (a meno di permutazioni dei blocchi sulla diagonale):
$$F_J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
     I modi elementari del sistema sono 2^t (divergente), $\delta(t)$ e $\delta(t-1)$ (entrambi convergenti).

2. Lo spazio raggiungibile in t passi è definito come

$$X_R(t) = \operatorname{Im} \mathcal{R}_t = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} G & FG & \cdots & F^{t-1}G \end{bmatrix}.$$

   Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
X_R(1) &= \operatorname{Im} G = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \\
X_R(2) &= \operatorname{Im} \begin{bmatrix} G & FG \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \\
X_R(3) &= \operatorname{Im} \begin{bmatrix} G & FG & F^2G \end{bmatrix} = \operatorname{Im} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \\
X_R(t) &= X_R(3), \quad t \geq 3.
\end{aligned}$$

   Riassumendo, possiamo concludere che

$$X_R(t) = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \forall t \geq 1, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Lo spazio controllabile in t passi è definito come

$$X_C(t) = \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, F^t x \in X_R(t)\}$$

Per i primi due passi abbiamo

$$X_C(1) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + \alpha x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\} = \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \text{se } \alpha = 1, \\ \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} & \text{se } \alpha \neq 1, \end{cases}$$

$$X_C(2) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 + (\alpha+1) x_3 \\ 2x_1 + 2x_2 + (\alpha+1) x_3 \\ 0 \end{bmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \right\} = \mathbb{R}^3, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Dal fatto che $X_C(t) \subseteq X_C(t+1)$, ne segue immediatamente che $X_C(t) = \mathbb{R}^3$ per ogni $t \geq 2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Dal punto precedente osserviamo che il sistema è controllabile (in almeno due passi) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e pertanto ammette sicuramente un controllore dead-beat per $\alpha = 1$. Sia $K = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix}$. Per calcolare le matrici K corrispondenti a controllori dead-beat, imponiamo

$$\begin{aligned} &\Delta_{F+GK}(\lambda) = \det(\lambda I - F - GK) \overset{!}{=} \lambda^3 \\ \implies &\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 - k_1 & -1 - k_2 & 1 - k_3 \\ -1 - k_1 & \lambda - 1 - k_2 & 1 - k_3 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^3 \\ \implies &\lambda^3 - \lambda^2 (2 + k_1 + k_2) = \lambda^3. \end{aligned}$$

da cui segue che $k_2 = -2 - k_1$. Quindi, la matrice $K = \begin{bmatrix} \beta & -2-\beta & \gamma \end{bmatrix}$, con $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ numeri arbitrari, corrisponde alla matrice di retroazione di un controllore dead-beat del sistema. Consideriamo ora la matrice $F + GK$, con K la matrice di retroazione appena determinata. Questa matrice ha la seguente forma

$$F + GK = \begin{bmatrix} 1+\beta & -1-\beta & 1+\gamma \\ 1+\beta & -1-\beta & 1+\gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Osserviamo che la matrice $F + GK$ risulta uguale alla matrice nulla se e solo se $\beta = -1$, $\gamma = -1$ e $\alpha = 1$. In questo caso il controllore dead-beat con matrice $K = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ porta a zero lo stato nel minor numero possibile di passi (cioè un passo).

Alternativamente, si poteva arrivare più velocemente alla stessa conclusione tramite ispezione diretta della matrice $F + GK$.

Esercizio 3 [9 pti].

1. Dalla struttura di F (o tramite calcolo diretto), si osserva che F ha due autovalori in $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ per ogni valore di $\alpha \in \mathbb{R}$. Per studiare l'osservabilità del sistema utilizziamo il test PBH di osservabilità.

   La matrice PBH valutata nei due autovalori λ_1 e λ_2 porge

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ -\alpha & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

   Osserviamo che

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = 3, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

mentre

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\lambda_2 I - F\\ H\end{bmatrix} = \begin{cases}3 & \text{se } \alpha \neq 0,\\ 2 & \text{se } \alpha = 0.\end{cases}$$

Concludiamo quindi che il sistema è osservabile se e solo se $\alpha \neq 0$, mentre è rivelabile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ perché, per $\alpha = 0$, l'unico autovalore non osservabile ($\lambda_2 = -1$) ha parte reale strettamente negativa.

2. Fissato $\alpha = 0$, dall'analisi del punto 1. deduciamo che uno stimatore asintotico dello stato esiste perché il sistema è rivelabile. Sia $L = \begin{bmatrix}\ell_1 & \ell_2 & \ell_3\end{bmatrix}^\top$ il guadagno dello stimatore. Siccome $\lambda_2 = -1$ è un autovalore non osservabile del sistema, un autovalore di $F + LH$ sarà sempre in -1. Per ottenere uno stimatore asintotico dello stato, possiamo decidere, per esempio, di allocare tutti gli autovalori $F + LH$ in -1. Per calcolare il guadagno corrispondente, possiamo usare la procedura di calcolo diretto imponendo

$$\Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) \overset{!}{=} (\lambda + 1)^3.$$

Si arriva quindi al seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases}1 - \ell_2 = 3\\ -1 - 2\ell_2 - 2\ell_3 = 3\\ -2\ell_3 - \ell_2 - 1 = 1\end{cases},$$

che ha come soluzione $\ell_2 = -2$, $\ell_3 = 0$. Quindi uno stimatore asintotico dello stato ha guadagno $L = \begin{bmatrix}0 & -2 & 0\end{bmatrix}^\top$.

Vale la pena notare che questo guadagno poteva essere ricavato più velocemente tramite ispezione diretta della matrice $F + LH$. Infatti utilizzando il guadagno appena ricavato questa matrice diventa triangolare superiore con elementi sulla diagonale tutti pari a -1.

3. Visto che abbiamo già ricavato al punto 2. uno stimatore asintotico dello stato, per ricavare un regolatore stabilizzante ci rimane da calcolare un controllore in retroazione dallo stato che stabilizzi il sistema. A questo scopo, come prima cosa osserviamo che, fissato $\alpha = 0$, il sistema è stabilizzabile e quindi un tale controllore esiste. Infatti la matrice PBH di raggiungibilità valutata nei due autovalori $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -1$ porge

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 I - F & G\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}\lambda_2 I - F & G\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{3}$$

che ha rango pieno in corrispondenza dell'unico autovalore con parte reale positiva ($\lambda_1 = 1$). Sia $K = \begin{bmatrix}k_1 & k_2 & k_3\end{bmatrix}$ la matrice di retroazione del controllore. Dalla struttura della matrice $F + GK$:

$$F + GK = \begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ k_1 & 1 + k_2 & 2 + k_3\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

si vede immediatamente che la scelta $k_1 = 0$, $k_2 = -2$, $k_3 = 0$ porge una matrice $F + GK$ triangolare con elementi sulla diagonale tutti pari a -1. Quindi con $K = \begin{bmatrix}0 & -2 & 0\end{bmatrix}^\top$ il sistema retroazionato ha tutti gli autovalori in -1 ed è quindi stabile. Concludiamo che un regolatore stabilizzante del sistema è composto (per esempio) da:

(a) uno stimatore dello stato con guadagno $L = \begin{bmatrix}0 & -2 & 0\end{bmatrix}^\top$ (trovato al punto 2.), e

(b) un controllore in retroazione dallo stato con matrice di retroazione $K = \begin{bmatrix}0 & -2 & 0\end{bmatrix}$.