Esame Scritto di Teoria dei Sistemi (Modulo A) del 06/09/2021: **Soluzioni**

Esercizio 1 [4 pti].

1. La matrice F è 3×3, quindi per calcolare la forma di Jordan di F è sufficiente calcolare gli autovalori di F e le molteplicità algebriche/geometriche di questi autovalori.

   (i) Calcolo autovalori di F: F è triangolare a blocchi con il primo blocco diagonale 2×2

$$F_{11} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha - 2 & 0 \end{bmatrix}$$

   con autovalori $\pm\sqrt{\alpha(\alpha-2)}$ e il secondo blocco diagonale scalare $F_{22} = 0$. Gli autovalori di F sono quindi: $\lambda(F) = \{0, \pm\sqrt{\alpha(\alpha-2)}\}$. Possiamo distinguere i casi:

   - $\alpha = 0$: F ha un unico autovalore in $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 3$ e molteplicità geometrica da calcolare.
   - $\alpha = 2$: F ha un unico autovalore in $\lambda_1 = 0$ con molteplicità algebrica $\nu_1 = 3$ e molteplicità geometrica da calcolare.
   - $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$: F ha tre autovalori distinti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = +\sqrt{\alpha(\alpha-2)}$, $\lambda_3 = -\sqrt{\alpha(\alpha-2)}$, con molteplicità algebriche $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 1$ e geometriche $g_1 = g_2 = g_3 = 1$.

   (ii) Calcolo molteplicità geometriche degli autovalori di F: Le molteplicità geometriche mancanti sono date da:

   - $\alpha = 0$: $g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 1 = 2.$
   - $\alpha = 2$: $g_1 = 3 - \text{rank}(\lambda_1 I - F) = 3 - \text{rank} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 - 2 = 1.$

   (iii) Calcolo della forma di Jordan di F e dei modi elementari del sistema: Utilizzando le informazioni trovate ai punti (i) e (ii), possiamo concludere:

   - $\alpha = 0$: La forma di Jordan di F è (a meno di una permutazione dei blocchi diagonali):

$$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

     I modi elementari sono: $\delta(t)$, $\delta(t-1)$.

   - $\alpha = 2$: La forma di Jordan di F è:

$$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

     I modi elementari sono: $\delta(t)$, $\delta(t-1)$, $\delta(t-2)$.

   - $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$: La matrice è diagonalizzabile e quindi forma di Jordan di F è (a meno di una permutazione degli elementi diagonali):

$$F_J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\alpha(\alpha-2)} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\alpha(\alpha-2)} \end{bmatrix}.$$

     I modi elementari sono: $\delta(t)$, $(\pm\sqrt{\alpha(\alpha-2)})^t$.

2. Per $\alpha = 2$ la matrice F diventa

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Notiamo che F è nilpotente e

$$F^0 = I,\ F^1 = F,\ F^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } F^t = 0,\ t \geq 3,$$

l'evoluzione libera dell'uscita del sistema si ottiene quindi come

$$\begin{aligned}
y_\ell(0) &= Hx(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \\
y_\ell(1) &= HFx(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \\
y_\ell(2) &= HF^2x(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 4, \\
y_\ell(t) &= HF^tx(0) = 0, \quad t \geq 3.
\end{aligned}$$

In maniera più compatta possiamo scrivere $y_\ell(t) = 4\delta(t-2)$.

3. Il sistema ammette dei modi puramente oscillatori se F ha almeno un autovalore con modulo unitario e diverso da $+1$. Per avere autovalori con modulo unitario, dalla soluzione del punto 1. dobbiamo avere

$$|\sqrt{\alpha(\alpha-2)}| = 1 \iff |\alpha(\alpha-2)| = 1 \iff \begin{cases} \alpha(\alpha-2) = 1, \\ \alpha(\alpha-2) = -1. \end{cases}$$

Le soluzioni che ci interessano sono quelle associate a $\alpha(\alpha-2) = -1$, che corrispondono ad autovalori di F in $\pm i$. Otteniamo quindi

$$\alpha(\alpha-2) = -1 \iff \alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha-1)^2 = 0 \iff \alpha = 1.$$

Concludiamo quindi che il sistema ammette dei modi elementari puramente oscillatori per $\alpha = 1$.

Esercizio 2 [4 pti].

1. $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ è un punto di equilibrio del sistema se e solo se

$$\begin{cases} 0 = (\alpha-1)^2\bar{x}_1 - \bar{x}_1^3 \\ 0 = (\alpha-1)\bar{x}_1^2\bar{x}_2 \end{cases} \tag{1}$$

La prima equazione in (1) si può riscrivere come $\bar{x}_1((\alpha-1)^2 - \bar{x}_1^2) = 0$. Se $\alpha \neq 1$ questa equazione ha soluzioni $\bar{x}_1 = 0$ e $\bar{x}_1 = \pm(\alpha-1)$, mentre se $\alpha = 1$ ha un'unica soluzione $\bar{x}_1 = 0$. Sostituendo queste condizioni nella seconda equazione in (1), si conclude che (i) il sistema ammette infiniti equilibri della forma $\bar{x} = (0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$, e, in aggiunta, i due equilibri finiti $\bar{x}^{(1,2)} = (\pm(\alpha-1), 0)$, se $\alpha \neq 1$ (ii) il sistema ammette infiniti equilibri della forma $\bar{x} = (0, \beta)$, $\beta \in \mathbb{R}$, se $\alpha = 1$.

2. La matrice Jacobiana del sistema è:

$$J_f(x) = \begin{bmatrix} (\alpha-1)^2 - 3\bar{x}_1^2 & 0 \\ 2(\alpha-1)\bar{x}_1\bar{x}_2 & (\alpha-1)\bar{x}_1^2 \end{bmatrix}.$$

Preso come equilibrio l'origine $\bar{x} = (0,0)$, la matrice Jacobiana in $\bar{x}$ è:

$$J_f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} (\alpha-1)^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gli autovalori di questa matrice sono $\lambda(J_f(\bar{x}^{(1)})) = \{0, (\alpha-1)^2\}$. Quindi per il teorema di linearizzazione concludiamo che $\bar{x}$ è un equilibrio instabile se $\alpha \neq 1$. Se $\alpha = 1$, siamo nel caso critico della linearizzazione.

3. Il caso critico della linearizzazione del punto 2. riguarda il valore $\alpha = 1$. Osserviamo innanzitutto che $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ è una funzione definita positiva in un intorno di $\bar{x}$. Calcoliamo dunque $\dot{V}(x_1, x_2)$:

$$\dot{V}(x_1, x_2) = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2 = -2x_1^4$$

Osserviamo che $\dot{V}(x_1, x_2)$ è semidefinita negativa. Per il teorema di Lyapunov, concludiamo quindi che $\bar{x} = (0,0)$ è (almeno) semplicemente stabile. Per verificare se la stabilità è solo semplice oppure asintotica, usiamo il teorema di Krasowskii. Abbiamo

$$\mathcal{N} = \{(x_1, x_2) \,:\, \dot{V}(x_1, x_2) = 0)\} = \{(x_1, x_2) \,:\, x_1 = 0,\, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Affinché una traiettoria $x(t) = (x_1(t), x_2(t)))$ sia interamente contenuta in $\mathcal{N}$, deve essere $x_1(t) = 0$ per ogni t, il che implica $\dot{x}_1(t) = 0$ per ogni t. Sostituendo questa condizione nelle equazioni della dinamica otteniamo:

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Queste equazioni non porgono alcuna restrizione sulla traiettoria di $x_2(t)$. Perció concludiamo che per ogni scelta di un intorno $\mathcal{I}$ di $\bar{x}$ esistono traiettorie diverse da $\bar{x}$ interamente contenute in $\mathcal{N} \cap \mathcal{I}$ della forma $x_1(t) = 0$, $x_2(t) = x_2(0) \neq 0$, $x(0) \in \mathcal{I}$. Quindi, per Krasowskii, abbiamo solo stabilità semplice.

Esercizio 3 [4 pti].

1. Per determinare l'osservabilità e la ricostruibilità del sistema usiamo il test PBH. Osserviamo che la matrice F è triangolare, quindi gli autovalori di F sono gli elementi sulla diagonale, $\lambda(F) = \{0, \alpha\}$. Distinguiamo i due casi:

   - $\underline{\alpha = 0}$: F ha un unico autovalore in $\lambda_1 = 0$. La matrice PBH di osservabilità calcolata in corrispondenza di questo autovalore è data da

   $$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \implies \text{rank}\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix}\right) = 2.$$

   Tale matrice non ha rango pieno, per cui $\lambda_1 = 0$ è un autovalore non osservabile.

- $\underline{\alpha \neq 0}$: F ha un due autovalori distinti $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \alpha$. Le matrici PBH di osservabilità calcolate in corrispondenza di questi autovalori sono

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -\alpha & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \implies \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \lambda_1 I - F \\ H \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 2, \\ 3 & \text{se } \alpha \neq 2, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & \alpha \\ 1 & 0 & \alpha \end{bmatrix} \implies \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \lambda_2 I - F \\ H \end{bmatrix}\right) = 3, \ \forall \alpha \neq 0.$$

Dai ranghi di tali matrici concludiamo che $\lambda_2 = \alpha \neq 0$ è un autovalore osservabile, mentre $\lambda_1 = 0$ è non osservabile se $\alpha = 2$.

Concludiamo quindi che il sistema è osservabile per $\alpha \notin \{0, 2\}$ ed è ricostruibile per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Usando l'espressione $X_{NO}(t) = \ker \mathcal{O}_t$ e ricordando che $X_{NO}(t) = X_{NO}(3)$ per ogni $t \geq 3$, otteniamo:

$$X_{NO}(1) = \ker \mathcal{O}_1 = \ker H = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right\},$$

$$X_{NO}(2) = \ker \mathcal{O}_2 = \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right\},$$

$$X_{NO}(t) = \ker \mathcal{O}_3 = \ker \begin{bmatrix} H \\ HF \\ HF^2 \end{bmatrix} = \ker \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right\} = X_{NO}(2), \quad \forall t \geq 3.$$

3. Per $\alpha = 2$ il sistema è ricostruibile (vedi punto 1.) e quindi uno stimatore dead-beat dello stato esiste. Per il calcolo dello stimatore possiamo usare il "metodo diretto". Sia $p(\lambda) = \lambda^3$ il polinomio caratteristico desiderato e $L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \end{bmatrix}^\top$, con $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \in \mathbb{R}$. Imponendo

$$\begin{aligned} \Delta_{F+LH}(\lambda) = \det(\lambda I - F - LH) &= \det \begin{bmatrix} \lambda - \ell_1 & 0 & -2\ell_1 \\ -2 - \ell_2 & \lambda - 2 & -2\ell_2 \\ -1 - \ell_3 & -1 & \lambda - 2\ell_3 \end{bmatrix} \\ &= \lambda^3 + (-2 - 2\ell_3 - \ell_1)\lambda^2 + (-2\ell_2 + 4\ell_3)\lambda \overset{!}{=} \lambda^3, \end{aligned}$$

otteniamo il sistema di equazioni lineari

$$\begin{cases} -2 - 2\ell_3 - \ell_1 = 0 \\ -2\ell_2 + 4\ell_3 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \ell_1 = -2 - 2\ell_3, \\ \ell_2 = 2\ell_3. \end{cases}$$

Le soluzioni di questo sistema porgono che tutti i possibili guadagni dello stimatore dead-beat:

$$L = \begin{bmatrix} -2 - 2\gamma \\ 2\gamma \\ \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Affinché un regolatore dead-beat esista il sistema deve essere controllabile e ricostruibile. Quindi basta verificare la controllabilità del sistema. In particolare, possiamo verificare se la matrice PBH di raggiungibilità ha rango pieno in corrispondenza dell'autovalore $\lambda_2 = 2$, che è l'unico autovalore di F diverso da zero. Abbiamo:

$$\begin{bmatrix}\lambda_2 I - F & G\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \implies \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix}\lambda_2 I - F & G\end{bmatrix}\right) = 2.$$

Tale matrice non ha rango pieno, per cui il sistema non è controllabile e un regolatore dead-beat non esiste.